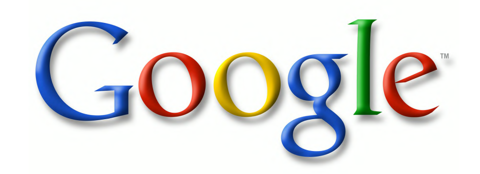
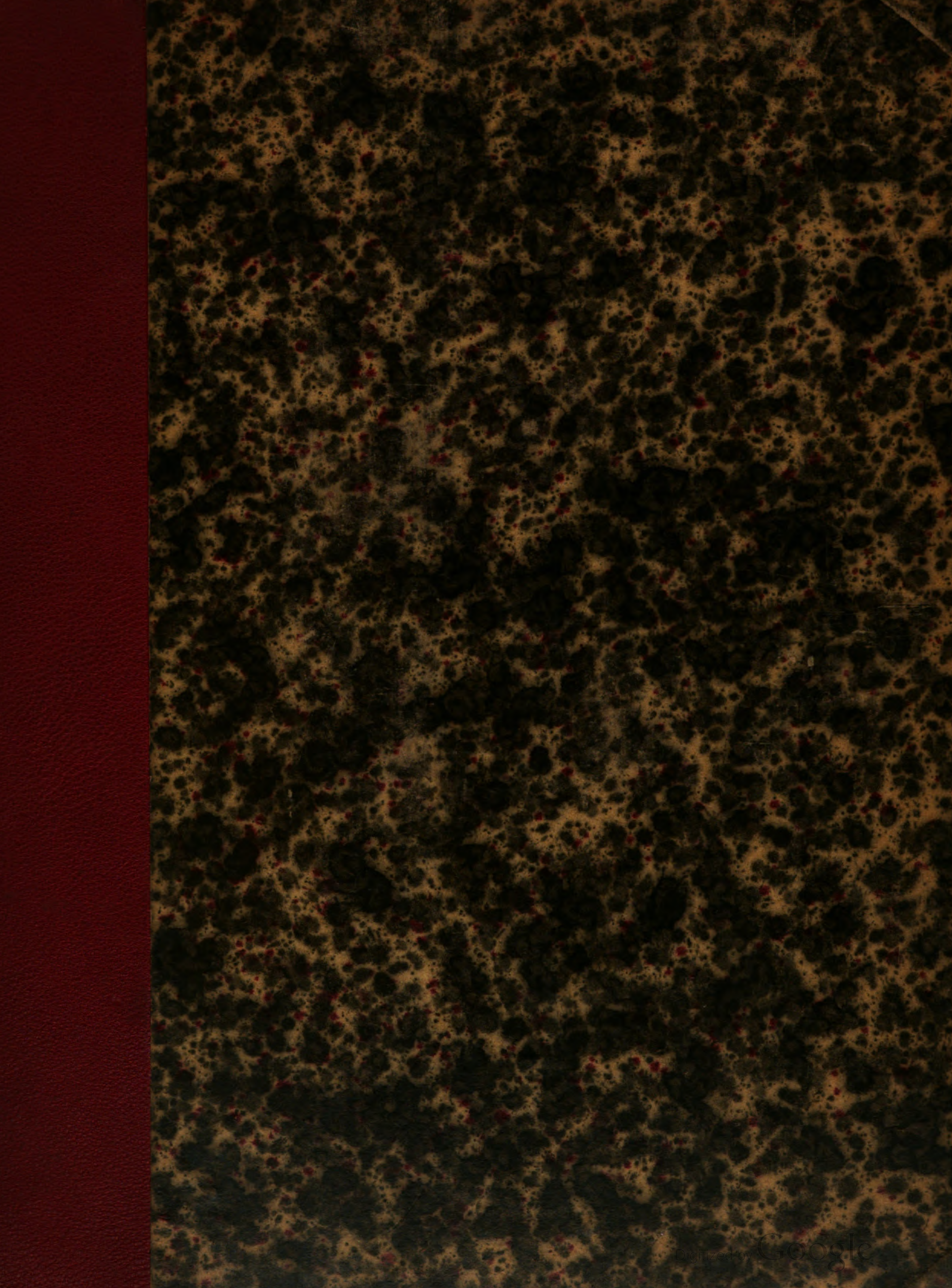
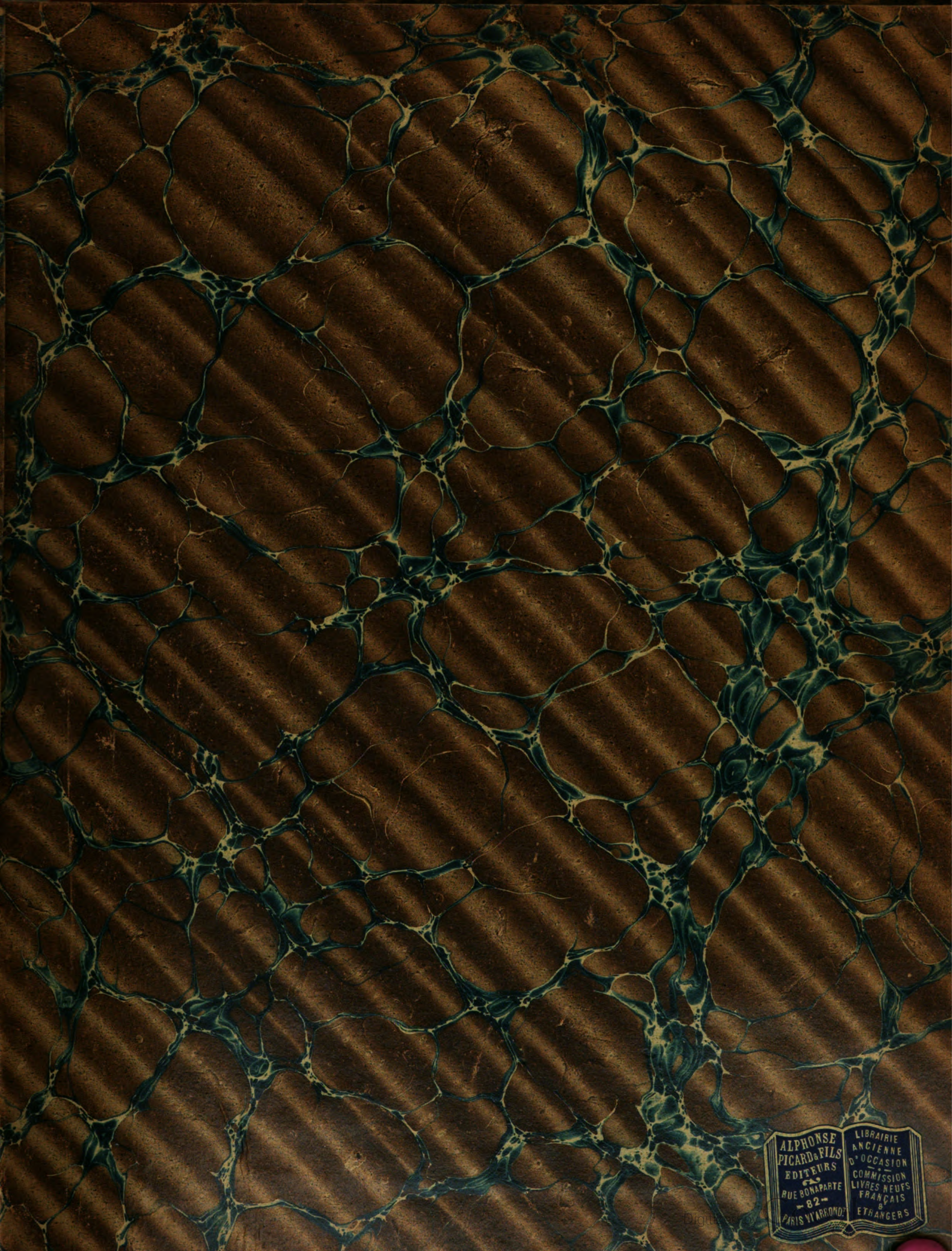






Math 5709.08.5
ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
SIGILLUM
VE RI TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE


ALPHONSE
PICARD & FILS
EDITEURS
RUE BONAPARTE
- 82 -
PARIS VIe ARROND^t
LIBRAIRIE
ANCIENNE
D'OCCASION
COMMISSION
LIVRES NEUFS
FRANÇAIS
&
ETRANGERS

COURS
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
DE
L'ÉCOLE MILITAIRE,

PAR

F. CHOMÉ,
Professeur à l'École Militaire de Belgique.

PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE PREMIER,

à l'usage des candidats à l'École Militaire et aux Écoles Spéciales des Universités.

TEXTE.

QUATRIÈME ÉDITION,

entièrement revue, corrigée et augmentée, contenant les prescriptions à observer pour l'exécution des épures.

BRUXELLES,
OFFICE DE PUBLICITÉ,
46, Rue de la Madeleine.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

DE

L'ÉCOLE MILITAIRE.

PROPRIÉTÉ.

GAND, IMP. EDOUARD MEYER, QUAI DU PONT NEUF, 5.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

DE

L'ÉCOLE MILITAIRE,

PAR

F. CHOMÉ,

Professeur à l'École Militaire de Belgique.

PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE PREMIER,

à l'usage des candidats à l'École Militaire et aux Écoles Spéciales des Universités.

TEXTE.

QUATRIÈME ÉDITION,

entièrement revue, corrigée et augmentée, contenant les prescriptions à observer pour l'exécution des épures.

BRUXELLES,
OFFICE DE PUBLICITÉ,
46, Rue de la Madeleine.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1908.

PRÉFACE.

I. — Si l'on considère les applications de la Géométrie Descriptive, on peut faire remonter *l'art du trait* des appareilleurs et des charpentiers à la plus haute antiquité ; si l'on considère les méthodes de la Géométrie Descriptive, *ses beaux secrets*, disait PHILIBERT DELORME dans son *Traité d'architecture* en 1567, il convient de les faire remonter aussi à des temps immémoriaux. Mais on peut dire que jusque MONGE, l'art du trait n'a « été pratiqué que d'une manière « obscure par des personnes dont l'éducation n'avait pas été assez « soignée et qui ne savaient pas communiquer les résultats de leurs médi- « tations » (*).

Monge a la gloire d'avoir débrouillé le chaos des procédés graphiques employés avant lui dans les Arts, d'avoir synthétisé ces procédés en un petit nombre de principes et sa *Géométrie Descriptive*, quand il l'enseigna publiquement à Paris, en 1794 et 1795, apparut comme une science nouvelle d'une merveilleuse fécondité (n° 24).

Parmi les moyens que Monge a employés pour l'enseignement de la Géométrie Descriptive, nous signalerons :

1° L'emploi d'un plan horizontal de projection et d'un plan vertical de projection *fixes*, donnant lieu à une intersection *fixe* qui fut appelée *ligne de terre* (**) et que l'on représenta dans l'épure, par deux projections confondues. Le nom de ligne de terre fut donné en imitation de ce qui se faisait en Perspective pour l'intersection du *Tableau* et du *Géométral*, et pour rappeler l'intersection du plan du sol avec le parement vertical d'un mur.

2° L'opacité des plans de projection, entraînant la nécessité de la connaissance des intersections de ces plans avec les droites, les

(*) G. MONGE — Programme de Géométrie Descriptive.
(**) *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1907, p. 171, n° 3252.

plans et les surfaces quelconques; ces intersections furent appelées les *traces* de ces dernières figures sur les plans de projection.

Or, jamais dans les Arts, ni avant ni après Monge, l'opacité des plans de projection et la fixité de ces plans, encore moins par conséquent l'emploi systématique des traces et d'une ligne de terre à projections confondues ou non, n'ont été considérés par les architectes et les ingénieurs; de sorte qu'il fallait, depuis Monge, pour passer de l'enseignement des méthodes de la Géométrie Descriptive à l'étude des applications, abandonner des habitudes théoriques qui n'ont jamais reçu de consécration pratique. Bien plus, nous verrons (II) qu'un grand nombre d'épures dessinées par les praticiens ne peuvent s'expliquer qu'en abandonnant au moins l'une des hypothèses signalées.

II. — Dès 1821, trois ans après la mort de Monge, L. L. Vallée, ancien élève de l'École Polytechnique, ingénieur au Corps des Ponts et Chaussées de France, au courant de « tout ce que les travaux « de Monge et la tradition de l'École Polytechnique offrent d'impor- « tant »(*) écrivait dans son *Traité de la Science du Dessin* :

« Dans les applications de la Géométrie Descriptive, on évite « autant que possible, la nécessité d'avoir dans les dessins des lignes « importantes qui ne soient pas vues, et c'est pourquoi les plans de « projection sont toujours supposés en arrière ou au-dessous de l'objet « représenté. Il arrive pourtant assez fréquemment, que la position « de la ligne de terre indique des plans de projection qui rencontrent « l'objet, mais alors cette ligne ne sert que pour les constructions, et l'on « imagine pour la mise au trait, un plan de projection plus reculé s'il est « vertical, et plus abaissé s'il est horizontal. La ligne de terre étant même « inutile.., on se dispense d'en avoir une. Alors les deux projections sont « en quelque sorte deux dessins isolés, qu'on a seulement le soin de « placer l'un au-dessous de l'autre, afin qu'ils servent aux opérations. »

On voit clairement dans ces lignes, la préoccupation qu'a l'auteur d'accorder les procédés des praticiens avec ceux des théoriciens.

Sous l'empire des idées régnantes, Vallée veut respecter l'opacité des plans de projection, ce qui le conduit immédiatement, pour expli-

(*) C. Dupin. — Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge. Paris, 1819.

quer les procédés des dessinateurs, non seulement à abandonner la position absolue de la ligne de terre, mais même à considérer les deux projections comme des dessins isolés qu'on a seulement le soin de placer en concordance (n° 40), sans pouvoir confondre les deux projections de la ligne de terre. La raison en est facile à comprendre.

Supposons en effet que la projection verticale d'un objet soit placée, dans une épure, au-dessus de la projection horizontale. Si la ligne de terre coupe l'une des projections, il faut que l'on déplace cette ligne parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle soit comprise entre les deux projections de l'objet, pour que celui-ci puisse être considéré comme étant situé au-dessus du plan horizontal de projection et en avant du plan vertical de projection.

Et si la projection horizontale de l'objet se trouve placée au-dessus de la projection verticale, comme cela arrive parfois dans les épures d'application dressées par les ingénieurs et les architectes, contrairement à ce que pensent certains théoriciens (VIII), alors le déplacement de la ligne de terre ne suffit plus, car aucun déplacement de cette ligne dans l'épure ne peut amener l'objet à être placé au-dessus du plan horizontal de projection et en avant du plan vertical de projection.

Voilà pourquoi Vallée doit se dispenser d'avoir dans l'épure, une ligne de terre à projections confondues et considérer ses deux projections de l'objet comme des dessins isolés simplement mis en concordance; la ligne de terre, si l'on voulait en considérer la position absolue, devrait être représentée par deux projections, dont l'une, la projection horizontale, serait placée n'importe où au-dessus de la projection horizontale de l'objet, et dont l'autre, la projection verticale, serait placée n'importe où au-dessous de la projection verticale de l'objet, ces deux projections de la ligne de terre ne pouvant du reste jamais être confondues.

Mais si la considération des deux projections, comme deux dessins isolés, est excellente pour expliquer toutes les épures d'application, même en supposant l'opacité des plans de projection, et est entièrement conforme aux habitudes des praticiens, il est vrai aussi que d'une part, l'hypothèse de l'opacité des plans de projection est aussi oiseuse que celle de la fixité de la ligne de terre à projections confondues ou

non, et que d'autre part, même la fixité de la ligne de terre à projections confondues ou non, dès qu'elle est alliée avec la transparence des plans de projection, permet d'expliquer toutes les épures des dessinateurs (VIII).

En 1882, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Mannheim fait remarquer que « quelles que soient les situations des plans de « projection, pourvu que leurs directions ne changent pas, on est « toujours amené à des épures qui ne diffèrent entre elles que par l'éloignement qui sépare les deux projections. »

Mannheim en parlant ainsi, suppose que les deux projections de la ligne de terre sont confondues dans l'épure, mais alors il aurait pu faire cette observation plus frappante, que quelles que soient les situations des plans de projection, pourvu que leur intersection reste parallèle à elle-même dans le second plan bissecteur, on est toujours amené à des épures qui ne diffèrent pas du tout entre elles, pas même par l'éloignement qui sépare les deux projections; il aurait pu remarquer encore que cette circonstance peut aussi se réaliser en laissant les plans de projection immobiles, mais en déplaçant l'objet représenté perpendiculairement à l'un d'eux.

Toutefois, ces explications n'auraient pas permis à Mannheim, pour un objet placé primitivement au-dessus du plan horizontal de projection et en avant du plan vertical de projection, de conserver tous les points de l'objet dans cette région; or, bien que ce ne soit pas toujours possible avec une ligne de terre à projections confondues, comme nous l'avons dit tantôt à propos d'une citation de Vallée, c'est ce que Mannheim voulait parce-qu'il n'a pas songé à se débarrasser de l'opacité des plans de projection en même temps que de la position absolue de la ligne de terre.

Il est vrai que le même auteur a fait remarquer que « les deux « projections (de l'objet) peuvent être tracées sur deux feuilles de « dessin séparées », mais il n'a pas utilisé cette remarque pour expliquer les épures des dessinateurs (n°s 33 et 34).

Mannheim ne s'est pas borné, comme Vallée, à faire constater que

la position absolue de la ligne de terre n'est pas nécessaire, il a signalé aussi que les tracés enseignés dans les éléments de Géométrie Descriptive « ne servent plus lorsqu'on arrive aux applications » et que « pour résoudre les problèmes élémentaires, on emploie des solutions « qui conduisent à des tracés simples, mais qui ne sont simples que grâce « à la préparation des données .» Comme conséquence logique, Mannheim conseillait « d'introduire dans les éléments, les procédés en usage dans « les applications..., de n'employer dès le début, que les solutions « mêmes qu'on retrouvera plus tard. »

Le conseil était excellent, mais il faut bien le dire, Mannheim ne changeait rien à l'exposition des principes ; il n'expliquait pas certaines épures qui, avec l'hypothèse de l'opacité des plans de projection, ne pouvaient s'interpréter, pour un objet, que par une simple mise en concordance des projections considérées comme des dessins isolés; il ne faisait pas connaître les conventions nécessaires pour « résoudre « le problème de manière à permettre la substitution de méthodes « générales et rationnelles aux méthodes particularistes et défectueuses « de l'enseignement élémentaire (*).

III. — Lorsque, dans la période 1877-1879, nous fûmes chargé, au Régiment du Génie, de préparer pour l'École Militaire les jeunes gens qui montraient quelques aptitudes pour l'étude des sciences, l'insuffisance des méthodes enseignées par tous les auteurs de cette époque, dans les Éléments de Géométrie Descriptive, nous frappa fortement et nous fîmes des efforts pour soulager la mémoire de nos élèves, tout en leur donnant des procédés généraux permettant de résoudre tous les problèmes qui peuvent se poser, quels que fussent les cas particuliers dont les ouvrages classiques d'alors étaient encombrés.

Ces préoccupations devinrent plus obsédantes encore lorsque, en 1880, la chaire de Géométrie Descriptive nous fut confiée à l'École Militaire, et dans notre Précis autographié de 1883, puis dans la première édition du Livre I de la Première Partie de notre Cours, en 1886, nous avons réagi contre le défaut de généralité qui caractérisait

(*) *Revue Universitaire*, 1892-1893 p. 121.

l'enseignement de cette époque, en ne liant plus nos méthodes aux traces des droites et des plans.

Même dès 1885, la ligne de terre fut supprimée dans notre cours oral, d'abord timidement, puis radicalement, sans même que les textes cités de Vallée et de Mannheim nous fussent connus à cette époque, tellement l'idée est naturelle pour tous ceux qui font de la Géométrie Descriptive en vue des applications aux travaux de l'ingénieur, et si, dans le cours imprimé de 1886, nous avons maintenu la ligne de terre et l'opacité des plans de projection dont les praticiens ne s'occupent jamais dans la représentation des figures, c'est que nous ne voulions pas rompre alors brusquement et publiquement, avec un passé de plus d'un siècle, sans pouvoir invoquer une expérience suffisamment longue pour appuyer nos idées.

Cependant, malgré nos efforts de 1883 et de 1886, la ligne de terre continuait à jouer dans l'enseignement un rôle inutile et nuisible. Inutile, car cette ligne ne simplifie aucune démonstration et sa suppression n'exclut aucune des épures que ses partisans préconisent; nuisible, parce qu'elle a amené les auteurs :

A considérer étourdîment que les plans de projection occupent des positions invariables et à inciter à leur emploi constant dans les opérations, au détriment de l'emploi d'autres plans plus avantageux;

A considérer à tout propos, que les intersections des lignes et des surfaces avec les plans de projection, « .....intersections qu'il est « impossible, difficile ou tout au moins désavantageux de déterminer « dans presque tous les cas d'application, constituent les éléments essen- « tiels et indispensables de la représentation de ces figures en Géométrie « Descriptive »(*);

A considérer les plans de projection comme étant opaques et à exiger dans les figures, en ce qui concerne le *vu* et le *caché*, la distinction entre les parties situées de part et d'autre de chacun de ces plans, alors même que ceux-ci ne font nullement partie des corps représentés;

A donner des cas particuliers pour des cas généraux et à formuler

---

(°) *Revue Universitaire*, 1892-1893, p. 120.

ainsi des règles et des méthodes laissant l'opérateur parfaitement désarmé dans la plupart des problèmes;

A faire jouer en un mot, à la ligne de terre et aux plans de projection, un rôle actif et prépondérant, complètement injustifié dans toutes les opérations et néfaste au point de vue de l'enseignement des méthodes (V).

C'est ainsi qu'on peut lire dans un ouvrage classique daté de 1888 et approuvé par le Conseil de perfectionnement de l'instruction moyenne (*), que « la connaissance des traces d'une droite est *in-* « *dispensable pour en faire le dessin exact...* »; que « le tracé des « courbes exige la connaissance des traces »; qu' « en Géométrie « Descriptive, la position d'un plan se détermine de préférence par « ses traces »; que « pour voir si une droite est dans un plan, on en « cherche les traces et l'on voit si elles se trouvent sur les traces de « même nom du plan »; que « pour mener en descriptive, par un point « donné, une droite perpendiculaire à un plan, il suffit d'abaisser de chaque « projection du point une perpendiculaire sur la trace de même nom du « plan », etc...! Je vois encore ce problème : « Par deux droites qui « se coupent faire passer un plan », ce qui signifie qu'on demande les traces du plan!

Voici la *règle générale* donnée pour trouver l'intersection de deux plans : « Projeter sur la ligne de terre le point de rencontre des « traces horizontales et le point de rencontre des traces verticales et « joindre les projections de même nom. »!

Voilà les oiseuses balivernes que l'emploi systématique de la ligne de terre avait amenées et dont devaient se charger les cerveaux des éléves! L'enseignement moyen restait cristallisé dans un esprit étroit et mesquin sans aucune harmonie avec les admirables applications de la Géométrie Descriptive aux Arts de la Construction; aussi, le maintien de la ligne de terre dans notre édition de 1886 nous apparut bientôt comme une concession dangereuse pouvant compromettre la suppression radicale des procédés d'enseignement dont nous venons de donner un échantillon.

(*) F. J. De Moor. Leçons de Géométrie Descriptive. Gand, Ad. Hoste, 1888. Dans une édition datée de 1900, la seconde citation est supprimée et la cinquième est améliorée.

IV. — C'est dans cette situation qu'en 1892, fort d'une expérience longue et concluante, nous nous sommes décidé à publier pour le Livre I de notre Cours, une édition conforme en tous points à notre enseignement oral tel qu'il était donné depuis 1885.

L'édition de 1892 était caractérisée par la suppression systématique de l'usage de la ligne de terre, et par la substitution complète de méthodes générales et fécondes aux méthodes particulières que l'emploi intempestif de la ligne de terre avait créées et qui restaient ignorées dans les applications; elle était du reste la preuve pratique la plus convaincante pour ceux qui, ne jugeant pas superficiellement, voulurent l'étudier en détail, que non seulement la ligne de terre n'est ni nécessaire, ni utile, mais qu'elle avait été nuisible à l'enseignement et que sa suppression, sans amener aucune difficulté, pouvait donner à la Géométrie Descriptive tout son essor et sa véritable portée.

« Que l'on ne nous soupçonne pas, disions-nous en 1892, d'avoir « visé à l'originalité, notre but n'a pas été aussi vain : nous n'avons « eu souci que de la précision scientifique et du progrès de l'en- « seignement.

« Depuis longtemps, nous nous abstenons de tracer la ligne « de terre dans nos épures, non seulement parce que sa direction seule « importe pour la représentation des corps et que dans les applications « de la Géométrie Descriptive aux Arts, on ne la dessine jamais, mais « encore parce que nous voulons empêcher nos élèves d'avoir constam- « ment recours à l'emploi intempestif des plans de projection.

« Combien d'élèves sont embarrassés de se servir de plans qui « ne seraient pas représentés par leurs traces sur les plans de projection!

« Combien d'élèves sont embarrassés de chercher l'angle des plans « de deux faces d'un polyèdre, quand ils ne peuvent, au préalable, « déterminer *dans les limites de l'épure*, les traces de ces plans!

« Nous avons voulu, dans cette édition, enseigner immédiatement « les méthodes telles qu'elles sont employées par les ingénieurs, et nous « nous sommes attaché à les établir d'une manière simple et précise, « en ne faisant que des conventions parfaitement permises et entière- « ment d'accord avec nos habitudes.

« Une expérience déjà longue nous a convaincu que notre exposé

« est, mieux que tout autre, à même de lever toutes les difficultés « que les commençants ont à vaincre, et si nous n'avions pas cette « conviction absolue, nous n'aurions pas la prétention, en publiant cet « ouvrage, de rendre quelque service à notre enseignement moyen. »

Monsieur Tassel, alors professeur à l'Université libre de Bruxelles, a pris vigoureusement la défense des idées nouvelles dans la *Revue Universitaire* du 15 décembre 1892.

« Depuis toujours, on s'est abstenu de faire figurer cette ligne « de terre dans les représentations relatives aux applications de la « Géométrie Descriptive aux Arts, applications qui constituent le but « même de cette science et sa raison d'être. Au contraire, elle figure « invariablement dans toutes les épures élémentaires où son emploi « ne répond à aucune utilité réelle, car il est facile de montrer, comme « le fait M. Chomé, que sa position absolue dans l'espace, de même « que celle des plans de projection, n'offre ni importance, ni nécessité « en tout ce qui concerne la représentation des figures.

« La direction de la ligne de terre importe seule et il suffit d'in- « diquer celle-ci sur l'épure.

« Pour peu que l'on ait pratiqué les méthodes de la Géométrie « Descriptive et que l'on se soit reporté à ses origines de manière à se « pénétrer du but et du caractère essentiellement pratiques de cette « science, la nécessité de procédés uniformes et généraux, dérivant « uniquement des procédés usités dans les applications, s'impose à l'esprit « et, en toute première ligne, la suppression du tracé de la ligne de « terre dans les épures, en raison de son inutilité même, est chose si « naturelle que nous n'aurions pas à féliciter M. Chomé d'avoir rompu « avec la tradition si, depuis le commencement du siècle, les auteurs « n'avaient été amenés à faire jouer à cette ligne de terre, dans toutes « les opérations graphiques élémentaires, un rôle actif que rien ne « justifie.

« C'est ainsi que les idées les plus fausses se sont propagées dans « l'enseignement. Les plans de projection ont été considérés comme « devant occuper une position invariable dans l'espace et certains auteurs « ont pu avancer que les traces des lignes, des plans et plus géné-

« ralement des figures quelconques, c'est-à-dire leurs intersections avec « ces plans de projection fixes, — intersections qu'il est impossible, « difficile ou tout au moins désavantageux de déterminer dans presque « tous les cas d'application — constituent les éléments essentiels et « indispensables de la représentation de ces figures en Géométrie « Descriptive. A l'heure actuelle, dans presque tous les cours élémen- « taires, la résolution des problèmes fondamentaux est faite en examinant « comme « cas généraux » des représentations spéciales, commodément « choisies, effectuées au moyen des traces et conduisant à des solutions « dont l'application aux cas qui se présentent en Stéréotomie, par « exemple, conduirait, si elle était possible, à de véritables monstruo- « sités graphiques. La connaissance, laborieusement acquise, de ces procé- « dés laisse d'ailleurs l'opérateur parfaitement désarmé en présence des « moindres difficultés qui se présentent dans les applications et nous « sommes convaincu que c'est dans l'usage abusif de la ligne de terre « que se trouve la raison pour laquelle tant de bons esprits, très « ouverts aux choses de science, éprouvent des difficultés presque insur- « montables dans l'étude de la Géométrie Descriptive.

« Déjà dans un opuscule publié en 1882, M. Mannheim avait « signalé les inconvénients nombreux de cet usage et indiqué l'intérêt « qu'il y aurait à ne plus faire figurer la position absolue de la ligne « de terre dans les épures, mais sans résoudre pourtant le problème « de manière à permettre la substitution de méthodes générales et « rationnelles aux méthodes particularistes et défectueuses de l'ensei- « gnement élémentaire.

« L'ouvrage de M. Chomé comble cette lacune. Quelques conven- « tions d'une grande simplicité lui ont permis d'atteindre le but poursuivi « et de présenter la solution de tous les problèmes indépendamment « de la position absolue des plans de projection et en employant les « données les plus générales.

« Les avantages des méthodes préconisées sont immenses. Si, par « l'emploi de données toujours accidentelles et conformes à celles qui « se rencontrent dans les applications, certaines représentations offrent, « à première vue, quelque complication, on ne tarde pas à constater « qu'en dernière analyse, l'ensemble des tracés relatifs à l'exécution

« des épures se trouve simplifié dans une large mesure et que la grande « latitude laissée au dessinateur dans le choix des constructions auxiliaires « lui permet d'atteindre une sobriété et une exactitude conséquente de « tracés que l'emploi constant de la ligne de terre ne saurait tolérer.

« D'autre part, les quelques conventions admises par l'auteur lui « ont permis de formuler pour toutes les opérations de la Géométrie « Descriptive des règles unitaires, d'une généralité absolue, et permet- « tant — la série des opérations à effectuer ayant été fixée par l'étude « géométrique préalable de chaque problème spécial — d'en opérer la « représentation par des moyens en quelque sorte mécaniques, ne pouvant « laisser place ni aux difficultés, ni à l'indétermination.

« Nous ne saurions nous dispenser de signaler, à l'appui de ce « qui précède, avec quelle facilité les parties vues et cachées des figures « peuvent être déterminées en s'aidant des conventions admises par « l'auteur, et avec quelle certitude et quelle sobriété de tracés la « recherche, si laborieuse et si confusément présentée jusqu'ici, des « intersections de polyèdres pourra s'effectuer par l'application des règles « qu'il a formulées.

« De même, l'importante théorie des rabattements ainsi que celles « des rotations et des changements de plan de projection, telles qu'elles « sont présentées, constituent des modèles de méthode et aboutissent « à des règles dont la mise en œuvre ne saurait rencontrer d'obstacles... »

V. — Nous nous attendions cependant à des résistances nombreuses et énergiques, mais nous nous sommes doublement trompé.

Les résistances ont reculé devant une discussion complète et approfondie, écrite ou orale, que nous avons offerte et qui a été déclinée.

D'autre part, Monsieur P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, seul, critiqua la suppression de la ligne de terre dans *Mathesis* (1893, p. 42.)

« Selon nous, cette suppression *prématurée* complique, sans utilité « immédiate, l'exposition *graduée* des éléments de la Géométrie Des- « criptive.

«« Il est une maxime aussi sage qu'ancienne: Dans tout enseigne- «« ment élémentaire on ne doit jamais courir au devant des difficultés « (Poncelet). »

Voici ce que nous avons répondu à cette critique :

« La suppression de la ligne de terre serait prématurée, d'après
« M. Mansion, et compliquerait, sans utilité immédiate, l'exposition
« graduée des éléments de la Géométrie Descriptive.

« Selon nous, cette affirmation est inexacte : elle accuse des idées
« qui ont leur origine dans l'enseignement habituel de la Géométrie
« Descriptive, mais que l'on ne justifie pas et que notre ouvrage condamne.

« Non seulement la ligne de terre est inutile, comme nous l'avons
« démontré (n° 37), mais elle est nuisible et il y a utilité à la supprimer
« dès le début de l'enseignement de la Géométrie Descriptive.

« Elle est nuisible, parce que les auteurs, par la position absolue
« de la ligne de terre, ont été entraînés à formuler des règles et des
« méthodes où les traces des plans et des droites interviennent intempes-
« tivement, que l'élève n'applique que moyennant la détermination
« préalable de ces traces et qu'il ne sait plus appliquer quand ces
« traces sont hors des limites de l'épure.

« Les méthodes doivent être indépendantes des données, convenir à
« tous les cas, et non pas seulement à des cas choisis ; elles doivent
« être applicables quand on n'a pas ou que l'on ne veut pas chercher les
« traces des plans et des droites, soit parce que ces traces sont hors
« de l'épure, soit parce que leur recherche surchargerait l'épure de
« lignes inutiles ou moins avantageuses que d'autres.

« La ligne de terre est encore nuisible, parce que son emploi
« et l'emploi des traces ayant conduit les auteurs, dans l'étude des
« méthodes, à prendre des données qui font image (comme dans la
« représentation d'un plan par ses traces), on habitue les commençants,
« non pas à raisonner indépendamment des données, mais à raisonner
« sur des données choisies ; ils prennent une épure pour une espèce
« de perspective de la figure représentée et quand la représentation
« ne fait plus image ils ne savent plus résoudre les problèmes : alors
« même qu'ils seraient en possession de méthodes générales, ils croient,
« ce qui est une grave erreur, que l'épure est plus difficile.

« Il y a donc utilité à supprimer la ligne de terre, dès le début
« de l'enseignement de la Géométrie Descriptive.

« Poncelet dit qu'il ne faut pas courir au-devant des difficultés. « Nous sommes aussi de cet avis; c'est petit à petit qu'il faut les « vaincre, mais c'est précisément ce qui n'est pas fait dans l'enseigne- « ment habituel des méthodes de la Géométrie Descriptive, attendu « qu'on n'y donne que des méthodes incomplètes. On fera bien à « cet égard, de méditer ce qu'a dit l'illustre Laplace : « Préférez, «« dans l'enseignement, les méthodes générales, attachez-vous à les «« présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même «« temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles. » Nous avons « suivi ce précepte et nous avons pu constater que les méthodes générales « sont aussi celles que les élèves préfèrent.

« Certes, la suppression de la ligne de terre dérangera bien des « habitudes acquises depuis longtemps, et nous entendrons encore, « sans aucun doute, les protestations de quelques représentants d'un « enseignement qui a eu ses auteurs célèbres, mais que nous considérons « comme irrémédiablement condamné. Nous sommes au moment d'une « évolution complète et heureuse, réclamée par M. Mannheim ; nous « pensons y avoir aidé en établissant l'enseignement que nous défendons, « sur des principes *nouveaux*, *clairs, simples* et *logiques* qui en rendent « l'étude facile et agréable pour les commençants. »

VI. — Le remède que nous apportions en 1892 pour améliorer le mauvais enseignement de la Géométrie Descriptive était radical, l'expérience a prouvé qu'il fut excellent.

La transformation pénétra partout : à l'Université de Bruxelles dès 1893 et puis successivement, dans presque tout l'enseignement moyen. Parmi les nombreux témoignages que nous pourrions en donner, nous aimons à faire connaître le suivant que nous avons l'autorisation de publier et qui nous fit connaître en 1895, une expérience décisive faite par Monsieur H. Bosmans, Préfet des cours scientifiques au Collège Saint-Michel à Bruxelles.

« On donne au Collège Saint-Michel, deux cours de Géométrie « Descriptive entièrement distincts; les élèves n'y ont aucune classe en « commun, pas même les travaux graphiques. J'y suis, me semble-t-il, « dans des conditions spécialement favorables pour y observer le mérite

« des deux méthodes en présence. Je tiens à vous dire que non seu-
« lement jusqu'ici, je ne remarque pas que les élèves qui suivent votre « méthode rencontrent plus de difficultés que les autres, mais c'est « plutôt le contraire qui a lieu. Aussi, loin « de compliquer sans «« utilité immédiate » l'enseignement traditionnel de la Géométrie Des- « criptive, j'estime que vous l'avez simplifié. »

En moins de huit années, les idées nouvelles se répandirent si bien, que le Gouvernement lui-même, dans ses Concours Généraux, abandonna la position absolue de la ligne de terre en 1900 et adopta même les notations que nous avons préconisées (XII et XIII).

Plus tard, en 1905, nous avons pu écrire dans l'*Enseignement mathématique* (p. 44) sans aucune protestation, qu'un anonyme a littéralement calqué le Cours donné à l'École Militaire, dans les *Notes du Cours de Géométrie Descriptive de l'Université de Louvain* (Louvain, A. UYTSPRUYT, 1904).

Les derniers défenseurs de la fixité de la ligne de terre professent eux-mêmes aujourd'hui que cette ligne n'est utile que tout au commencement de l'étude de la Géométrie Descriptive et qu'il faut, le plus vite possible, se familiariser avec sa suppression.

On peut donc affirmer qu'en Belgique, l'évolution que nous avons prévue en 1893 (MATHESIS, 1893, p. 45) a été complète et rapide; nous pouvons ajouter qu'il en est résulté un progrès considérable, comme le prouvent annuellement, jusqu'à l'évidence, les examens d'entrée à l'Ecole Militaire.

Signalons encore qu'on a cessé de donner la ligne de terre en France, aux Concours de l'École Polytechnique depuis 1887, à ceux de l'École Nationale des Ponts et Chaussées depuis 1899, à ceux de l'École des Mines de Saint-Etienne depuis 1906, etc.

VII. — Dans cette évolution des idées, des esprits chagrins ont cru voir une atteinte à la gloire de Monge, comme si la fixité ou l'opacité des plans de projection, et l'emploi systématique des traces constituaient une parcelle de la gloire qu'a cet homme célèbre, d'avoir le premier, synthétisé et complété les procédés graphiques employés de temps immémorial par les appareilleurs et les charpentiers. La routine

invoque parfois des raisons étranges pour s'opposer à la marche des idées, mais quoiqu'il en puisse coûter aux retardataires qui aiment dans les méthodes, non leur plus grande logique, mais leur plus grande ancienneté, quelque désir qu'ils aient de s'éviter la peine de modifier leurs habitudes, ils doivent « tôt ou tard cesser de se traîner sur les pas des auteurs, même les plus célèbres » (*) et céder à la puissance du progrès, des convictions et des aspirations nouvelles.

VIII. — Certains auteurs affirment témérairement que dans toutes leurs épures, les praticiens séparent soigneusement la projection horizontale et la projection verticale d'une figure et que la première est toujours placée au-dessous de la seconde.

Il y a là une complète erreur. Les praticiens veillent généralement à séparer le contour apparent horizontal du contour apparent vertical de l'objet à représenter, mais dans bien des cas, le contour apparent vertical est placé au-dessous du contour apparent horizontal (II). Pour le surplus, les dessinateurs ne s'intéressent pas aux dispositions relatives des projections des lignes auxiliaires (n° 43).

Pour se préparer sérieusement à la pratique du tracé des épures, il faut donc s'habituer à résoudre les problèmes qui se posent en Géométrie Descriptive, quelles que soient les positions relatives des projections des figures; l'expérience autant que la raison prouvent qu'il n'y a à cela aucune difficulté, dès qu'on est en possession de méthodes indépendantes de la position des données; ces méthodes n'empêchent du reste jamais de saisir toutes les circonstances qui peuvent en simplifier l'emploi.

IX. — Pour établir la concordance habituelle entre la projection verticale et la projection horizontale d'une figure, nous avons, dans les éditions précédentes, à l'exemple de Monge et de tous les auteurs qui ont écrit après lui, rabattu l'un des plans de projection sur l'autre. Cependant ce rabattement ne constitue pas une nécessité de principe, mais bien une explication qui nous paraissait la plus simple, non pas pour justifier une concordance qui n'est pas nécessaire, mais pour montrer

(*) S. F. Lacroix. Essais sur l'Enseignement.

la possibilité d'une concordance généralement utilisée pour la facilité du dessinateur.

La complète indétermination de la ligne de terre; la faculté donnée au dessinateur de prendre le plan de l'épure indifféremment comme plan horizontal ou comme plan vertical de projection, suivant qu'il considère la projection horizontale ou la projection verticale de la figure; la restitution des points de l'espace en partant de l'une ou de l'autre projection, sans relèvement d'un plan de projection qui aurait été primitivement rabattu sur l'autre; toutes ces considérations pouvaient éviter au lecteur attentif de nos précédentes éditions, de croire que le rabattement fût donné comme un principe.

Cependant pareille confusion a été faite dans ces derniers temps et pour l'éviter dans l'avenir, nous abandonnons complètement le rabattement dans cette édition nouvelle. De cette manière, non seulement l'erreur ne sera plus possible, mais encore l'indétermination de la ligne de terre et des plans de projection, telle qu'elle existe dans les épures des praticiens, sera mise en évidence dès le début, sans qu'il puisse encore subsister dans l'esprit du lecteur, le moindre doute ni la moindre apparence de contradiction (II).

X. — Nous avons amélioré nos conventions relatives à la représentation des figures, ainsi que nos méthodes pour la détermination des sections planes dans les polyèdres et des intersections de polyèdres. Ces dernières méthodes ont été modifiées conformément à l'exposé que nous en avons fait récemment dans les *Archives de Mathématiques* (1907); elles permettent de déterminer systématiquement et sans peine toutes les circonstances que présentent les polygones d'intersection, elles transforment le labyrinthe apparent des constructions en un chemin facile à suivre par le dessinateur, sans que celui-ci puisse jamais s'égarer; elles donnent mécaniquement, à l'artiste, les noms de tous les sommets utiles de l'intersection cherchée dans l'ordre de leur succession géométrique, sans qu'il doive faire le moindre effort pour les découvrir.

XI. — Les expressions *droite debout* et *plan debout* suggérées

par le langage de la marine et désignant une droite et un plan perpendiculaires au plan vertical de projection, de même que les expressions *droite de front* et *plan de front* empruntées à la perspective pour désigner une droite et un plan parallèles au plan vertical de projection, simplifient très heureusement le langage et sont aujourd'hui adoptées partout; nous continuerons donc à nous en servir.

XII. — En vue de désigner avec simplicité et avec précision les points, les droites et les plans, nous adopterons en général, le système de notations géométriques admis par les auteurs de Géométrie Projective (n° 1). Ce système que nous employons dans notre enseignement, depuis 1895, sans aucune difficulté et qui a servi à rédiger nos *Éléments de Géométrie Descriptive* (*), présente d'incontestables avantages et il y a lieu de l'introduire dans toutes les études géométriques (**).

Les points sont désignés par les lettres majuscules A, B, C,...; les droites et les lignes, par les lettres minuscules *a*, *b*, *c*,...; les plans et les surfaces par les lettres minuscules de l'alphabet grec. En outre, (A, B) désigne la droite déterminée par les points A et B ; (A, *a*), le plan passant par le point A et la droite *a* ; (*a*, β), le point commun à la droite *a* et au plan β; (A, B, C), le plan qui passe par les trois points A, B et C; (α,β), l'intersection des plans α et β; et ainsi de suite.

XIII. — Nous n'avons rien changé aux notations, inspirées par celles d'Olivier et que nous avons employées dans nos précédentes éditions pour désigner les projections des figures (n° 9) : A^h et A^v désignent respectivement la projection horizontale et la projection verticale d'un point A, l^h et l^v désignent respectivement la projection horizontale et la projection verticale d'une ligne ; α^h désigne la projection horizontale d'un plan vertical α ; β^v désigne la projection verticale d'un plan debout β.

Ces notations extrêmement simples permettent un texte clair et concis, exempt d'encombrement, puisqu'on peut y parler des figures de l'espace sans se préoccuper des projections que l'on trouve très aisément

(*) F. Chomé, Éléments de Géométrie Descriptive. Bruxelles, Castaigne, 1896.

(**) *Intermédiaire des Mathématiciens* 1897, pp. 99, 191 et 286.

dans l'épure ; elles permettent aussi, et ce n'est pas leur moindre avantage, d'employer les désignations conventionnelles de la Géométrie Projective (XII) et d'exécuter les changements de plan de projection avec une rare facilité, dans tous les cas.

Du reste, les notations ne sont à prodiguer dans les épures qu'au début de l'étude de la Géométrie Descriptive, quand l'élève, encore maladroit et malhabile, sent la nécessité de voir écrite à côté de chaque ligne, sa signification précise ; plus tard, dans les applications aux Arts, les projections horizontales, les élévations et les coupes sont toujours distinctes, et dès qu'il n'est plus possible de les confondre, les notations peuvent se simplifier et même souvent entièrement disparaître (n°s 42 et 147 à 156).

XIV. — Tous ceux qui font le métier d'appliquer la Géométrie à la représentation des corps, savent que les dessinateurs les plus habiles sont ceux qui reviennent le plus souvent à l'étude des méthodes. Nous avons donc accompagné l'exposition de ces méthodes d'exemples nombreux, et nous n'avons pas hésité, au risque de nous entendre dire que notre ouvrage est trop étendu, à entrer dans des développements qui ne paraîtront inutiles qu'aux théoriciens, trop peu préoccupés du but que la Géométrie Descriptive doit atteindre.

Ixelles, le 25 septembre 1907.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

INTRODUCTION.

§ I. NOTATIONS, DÉFINITIONS ET CONVENTIONS.

Notations de la Géométrie Projective. — I. En vue de désigner avec simplicité et précision, les points, les droites et les surfaces, nous adopterons dorénavant, en général, les notations admises par les auteurs de géométrie projective : les points seront désignés par les lettres majuscules A, B, C,....; les droites et les lignes, par les lettres minuscules *a, b, c,....*; les plans et les surfaces, par les lettres minuscules de l'alphabet grec (Préface, XII).

En outre (A, B) désignera la droite déterminée par les points A et B; (A, *a*), le plan passant par le point A et la droite *a*; (*a*, α), le point commun à la ligne *a* et à la surface α; (A, B, C), le plan qui passe par les trois points A, B, C; (α, β, γ) un point commun aux surfaces α, β, γ; et ainsi de suite.

Ces notations, avec lesquelles nous avons déjà rédigé nos *Éléments*

de Géométrie Descriptive (*) s'emploient sans difficulté, présentent d'incontestables avantages et devraient être introduites définitivement dans les études géométriques. (**)

Définitions. — **2.** La *projection orthogonale* d'un point A sur un plan α, est le pied de la perpendiculaire *p* abaissée du point A sur le plan α; c'est le point (*p*, α). La perpendiculaire *p* est dite la *projetante du point* ou la *droite projetant le point*. Le plan α est appelé *plan de projection*.

La *projection orthogonale* d'une ligne *l* sur un plan α, est le lieu des projections orthogonales de tous les points de la ligne.

Quand une droite *d* est perpendiculaire à un plan α, le point (*d*, α) est la projection orthogonale commune, sur le plan α, de tous les points de *d*.

Quand un plan β est perpendiculaire à un plan α, la droite (α, β) est la projection orthogonale, sur l'un des plans, de tous les points de l'autre plan.

3. La *projection oblique* d'un point A sur un plan α, est l'intersection de ce plan α avec une droite *p* menée par A parallèlement à une droite donnée *a*, non parallèle à α; c'est le point (*p*, α). La droite *p* est dite la *projetante du point* A, ou la droite projetant le point. Le plan α est appelé *plan de projection* ou *tableau*.

La *projection oblique* d'une ligne *l* sur un plan α, est le lieu des projections obliques de tous les points de la ligne.

Quand une droite *d* est parallèle à la droite *a* choisie pour la direction des projetantes, le point (*d*, α) est la projection oblique commune, sur le plan α, de tous les points de *d*.

Quand un plan β est parallèle à la droite *a* choisie pour la direction des projetantes, la droite (α, β) est la projection oblique, sur le plan α, de tous les points de β.

4. Les projections orthogonales et obliques sont parfois désignées sous le nom de *projections cylindriques*.

(*) Bruxelles, ALFRED CASTAIGNE, 1896.
(**) *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1897, p. 99, n° 1054.

5. La *projection polaire*, *centrale*, *conique* ou *perspective* d'un point A, sur un plan α, est l'intersection de ce plan α avec une droite *p* menée par A et par un point fixe S appelé *pôle*, *œil* ou *centre de projection*; c'est le point (*p*, α). La droite *p* est dite la *projetante du point* A ou la droite projetant le point. Le plan α est appelé *plan de projection* ou *tableau*.

La *projection polaire* d'une ligne *l*, sur un plan α, est le lieu des projections polaires de tous les points de la ligne.

Quand une droite *d* passe par le pôle S, le point (*d*, α) est la projection polaire commune, sur le plan α, de tous les points de *d*.

Quand un plan β passe par le pôle S, la droite (α, β) est la projection polaire, sur le plan α, de tous les points de β.

THÉORÈME I.

6. *Toute figure* f *située (fig. 1) dans un plan* α *parallèle à un plan de projection* β, *se projette cylindriquement sur ce dernier plan suivant une figure* f' *égale à* f.

En effet, rapportons la figure *f* à deux axes quelconques OX et OY tracés dans le plan α, rapportons de même la figure *f'* à deux axes O'X' et O'Y' qui soient les projections cylindriques sur β des axes OX et OY. Un point quelconque A de *f* aura ses coordonnées égales aux coordonnées du point A' de *f'*, A' étant la projection de A; par conséquent, en superposant les plans α et β de manière que les axes OX et OY soient placés respectivement sur les axes O'X' et O'Y', les figures *f* et *f'* seront confondues.

Plan horizontal et plan vertical de projection. — Sol et mur, ligne de terre. — 7. Dans la pratique, on est très familiarisé avec la position d'un plan horizontal H (perpendiculaire au fil à plomb) et avec la position d'un plan vertical V (parallèle au fil à plomb); il est donc naturel, quand on veut considérer un plan de projection, de supposer que celui-ci est horizontal ou vertical, alors même qu'il ne le serait pas et de l'appeler *plan horizontal de projection* dans le premier cas, *plan vertical de projection* dans le second cas.

Nous serons amené souvent à considérer simultanément deux plans

de projection perpendiculaires entre eux et nous supposerons généralement que l'un d'eux est un plan horizontal de projection et que l'autre est un plan vertical de projection; le premier sera souvent désigné par la lettre H et le second par la lettre V (fig. 2).

On se figure souvent les deux plans de projection H et V, en confondant le plan H avec le plan du sol et le plan V avec le parement vertical d'un mur. Il en est résulté qu'on désigne sous le nom de *ligne de terre* l'intersection de deux plans de projection perpendiculaires entre eux.

Plan vertical, de front, debout, horizontal, de profil. — **8.** On appelle *plan vertical* tout plan perpendiculaire au plan horizontal de projection. Parmi les plans verticaux, on distingue le plan vertical de projection et il est utile de signaler aux commençants qu'un plan vertical est généralement différent du plan vertical de projection.

On appelle *plan de front*, tout plan parallèle au plan vertical de projection.

On appelle *plan debout* tout plan perpendiculaire au plan vertical de projection. Parmi les plans debout, on distingue le plan horizontal de projection.

On appelle *plan horizontal* tout plan parallèle au plan horizontal de projection.

On appelle *plan de profil*, tout plan perpendiculaire à la ligne de terre.

L'élève doit se familiariser avec ces définitions et s'exercer à voir les figures définies, par rapport au sol et à un mur vertical.

Projection horizontale, projection verticale. Notations. — **9.** On appelle *projection horizontale* d'un point, d'une ligne ou d'un plan vertical, la projection orthogonale de ce point, de cette ligne, ou de ce plan vertical sur le plan horizontal de projection (n° 2).

On appelle *projection verticale* d'un point, d'une ligne ou d'un plan debout, la projection orthogonale de ce point, de cette ligne, ou de ce plan debout sur le plan vertical de projection.

Pour désigner les projections horizontales des points, des lignes ou

des plans verticaux, on affectera les signes désignant ces figures de l'exposant *h*.

Pour désigner les projections verticales des points, des lignes ou des plans debout, on affectera les signes désignant ces figures de l'exposant *v*.

Ainsi, il doit être entendu que si dans une question quelconque, il est parlé d'un point A, A^h et A^v désigneront respectivement la projection horizontale et la projection verticale du point A; s'il est parlé d'une ligne *l*, l^h et l^v désigneront respectivement la projection horizontale et la projection verticale de la ligne *l*; s'il est parlé d'un plan vertical α, α^h désignera la projection horizontale du plan α; enfin, s'il est parlé d'un plan debout β, β^v désignera la projection verticale du plan β.

Premières conclusions. — **10.** *Tout plan horizontal a une projection verticale parallèle à la ligne de terre.*

Tout plan de front a une projection horizontale parallèle à la ligne de terre.

Tout plan de profil a une projection horizontale et une projection verticale perpendiculaires à la ligne de terre au même point de cette ligne.

Les distances entre les projections horizontales de différents plans de profil sont respectivement égales aux distances correspondantes entre les projections verticales de ces plans.

THÉORÈME II.

11. *La distance d'un point à un plan est égale à la distance des projections du point et du plan, sur un nouveau plan perpendiculaire au précédent.*

En effet, soit (fig. 2) AA^v la distance du point A au plan V et soient A^h et LT les projections du point A et du plan V sur le plan H perpendiculaire à V. Le plan A^vAA^h perpendiculaire aux plans V et H est perpendiculaire à leur intersection LT en un point I. Joignons IA^v et IA^h; l'angle I est droit comme étant la mesure d'un dièdre droit, les angles A^v et A^h sont droits aussi, puisque AA^v et AA^h sont perpendiculaires res-

pectivement aux plans V et H, donc la figure AA^vIA^h est un rectangle et l'on a $AA^v = A^hI$.

12. On déduit du théorème précédent les conclusions pratiques suivantes qui sont importantes à noter :

1° *La distance d'un point à un plan debout est égale à la distance de la projection verticale du point à la projection verticale du plan debout.*

2° *La distance d'un point à un plan horizontal est égale à la distance de la projection verticale du point à la projection verticale du plan horizontal.*

3° *La distance d'un point à un plan vertical est égale à la distance de la projection horizontale du point à la projection horizontale du plan vertical.*

4° *La distance d'un point à un plan de front est égale à la distance de la projection horizontale du point à la projection horizontale du plan de front.*

Ainsi, dans la figure 3 que nous supposons tracée sur le plan vertical de projection V, la projection verticale H^v du plan horizontal de projection H est la ligne de terre (n°s 2 et 7), la projection verticale α^v d'un plan horizontal α est parallèle à la ligne de terre (n° 10), β^v est la projection verticale d'un plan debout; $A^v I$, $A^v K$ et $A^v L$ représentent respectivement les distances du point A aux plans H, α et β; I K est la distance entre les plans parallèles H et α.

De même, dans la figure 4 que nous supposons tracée sur le plan horizontal de projection H, la projection horizontale V^h du plan V est la ligne de terre, la projection horizontale α^h d'un plan de front α est parallèle à la ligne de terre, β^h est la projection horizontale d'un plan vertical; $A^h I$, $A^h K$ et $A^h L$ représentent respectivement les distances du point A aux plans V, α et β; I K est la distance entre les plans parallèles V et α.

Au-dessus et au-dessous, en avant et en arrière, à droite et à gauche. — 13. Dans le langage vulgaire, on emploie fréquemment les expressions *au-dessus*, *au-dessous*, *en avant*, *en arrière*, *à droite*

et *à gauche*. Afin de pouvoir les introduire dans le langage scientifique, avec la précision nécessaire, nous aurons égard aux considérations suivantes :

I. Tout plan α divise l'espace en deux parties : si l'une de ces parties est dite *au-dessus* du plan α, l'autre sera dite *au-dessous* du plan α (fig. 5).

II. Tout plan π, parallèle au plan α, divise aussi l'espace en deux parties : celle qui comprend ou ne comprend pas le plan α, suivant que π est au-dessous ou au-dessus du plan α, est dite *au-dessus* de π, l'autre est dite *au-dessous* de π.

Dans la figure 5, nous avons supposé que les plans α, β, γ, parallèles entre eux, sont perpendiculaires au plan du papier. Le plan β est au-dessus de α et de γ, le plan α est au-dessous de β et au-dessus de γ, le plan γ est au-dessous de α et de β.

Ces considérations sont analogues à celles que l'on fait valoir en Géométrie Analytique et en vertu desquelles toutes les droites parallèles entre elles, rencontrant un plan α et tous les plans parallèles à α, sont considérées comme des semi-droites ayant toutes le même sens positif et le même sens négatif.

III. Un point A est dit *au-dessus* ou *au-dessous* du point B, *par rapport à un plan* α, lorsque le point A est au-dessus ou au-dessous du plan mené par B parallèlement au plan α.

IV. Un point A est dit *au-dessus* ou *au-dessous* d'une surface ou d'une portion de surface σ, *par rapport à un plan* α, lorsque le point A est au-dessus de tous les points de la surface ou de la portion de surface σ, ou lorsqu'il est au-dessous de tous ces points.

V. Une figure quelconque est dite *au-dessus* ou *au-dessous* d'un point B, ou d'une surface, ou d'une portion de surface σ, *par rapport à un plan* α, lorsque tous les points de la figure sont au-dessus ou au-dessous de B ou de σ.

14. Parfois, les expressions *au-dessus* et *au-dessous* sont remplacées



respectivement par les expressions *en avant* et *en arrière* ou *à droite* et *à gauche*.

15. On peut répéter tout ce qui est dit au numéro 13 pour chacun des plans de projection H et V (n° 7) et pour tout plan de profil, mais habituellement, on emploie les mots *au-dessus* et *au-dessous* quand on parle par rapport à un plan horizontal; les mots *en avant* et *en arrière* quand on parle par rapport à un plan de front; les mots *à droite* et *à gauche*, quand on parle par rapport à un plan de profil.

Dès lors :

Quand on dit qu'un point A est *au-dessus* ou *au-dessous* d'un point B ou d'une surface ou d'une portion de surface, sans qu'on spécifie le plan par rapport auquel on parle, on sous-entend que ce plan est horizontal;

Quand on dit qu'un point A est *en avant* ou *en arrière* d'un point B ou d'une surface ou d'une portion de surface σ, sans qu'on spécifie le plan par rapport auquel on parle, on sous-entend que ce plan est de front;

Quand on dit qu'un point A est *à droite* ou *à gauche* d'un point B ou d'une surface ou d'une portion de surface σ, sans qu'on spécifie le plan par rapport auquel on parle, on sous-entend que ce plan est de profil.

Conventions générales. — **16.** Le dessinateur peut choisir arbitrairement la partie de l'espace située au-dessus de H, en avant de V, à droite d'un plan de profil, mais il adopte toujours tacitement des conventions que nous essaierons de traduire d'une façon générale.

I. — *Nous supposerons que les plans de projection H et V* (n° 7) *présentent chacun deux faces : l'une, dite* FACE DE DESSUS *ou* FACE D'AVANT, *correspondant à la partie de l'espace située au-dessus ou en avant du plan considéré; l'autre dite* FACE DE DESSOUS *ou* FACE D'ARRIÈRE, *correspondant à la partie de l'espace située au-dessous ou en arrière de ce plan* (n°s 14 et 15).

II. — *Nous supposerons encore que l'on ne dessine jamais que sur l'une des faces de chacun des plans de projection, et que le dessin ne peut être lu sur la face opposée à la face sur laquelle il est tracé.*

Cette hypothèse est naturelle, attendu qu'en général, un plan

appartient à un corps matériel situé tout entier d'un même côté de ce plan.

III. — *Nous conviendrons de toujours choisir comme partie de l'espace située au-dessus ou en avant d'un plan de projection, celle qui correspond à la face sur laquelle on dessine.*

On pourrait faire l'hypothèse contraire, mais celle que nous faisons est conforme à l'usage; grâce à elle, la signification vulgaire des mots au-dessus et au-dessous s'accorde avec la signification que nous leur attribuons, puisque pour tout le monde, la main du dessinateur est toujours placée au-dessus ou en avant de la surface sur laquelle il dessine.

IV. — *Nous conviendrons de placer la lettre désignant chacun des plans de projection, dans la portion du plan désigné située au-dessus ou en avant de l'autre plan (ou d'un plan parallèle) et contre la projection de ce dernier plan sur le premier, si la nature de la question traitée ne permet pas de reconnaître immédiatement, dans chaque plan de projection, la partie que nous venons de signaler.*

Ainsi, dans la figure 6, chacune des lettres H indique, dans le plan horizontal de projection, le côté en avant par rapport aux plans de front et chacune des lettres V indique, dans le plan vertical de projection, le côté au-dessus par rapport aux plans horizontaux.

Dans la figure 7, que nous supposons tracée sur un plan horizontal de projection, le côté *au-dessus* par rapport aux plans horizontaux est donné par le dessin, le côté *en avant* par rapport au plan de front α et par rapport à tous les autres plans de front est donné par la lettre H.

Dans la figure 8, que nous supposons tracée sur un plan vertical de projection, le côté *en avant* par rapport aux plans de front est donné par le dessin, le côté *au-dessus* par rapport au plan horizontal δ et par rapport à tous les autres plans horizontaux est donné par la lettre V.

Il faut se rappeler que dans chacune des figures 7 et 8, α^h et δ^v sont parallèles à la ligne de terre qui n'est pas dessinée (n° 10).

Remarquons, à propos de la convention IV, que dans la figure 7, l'absence de la lettre H nous mettrait dans l'impossibilité de connaître

le sens *en avant* par rapport aux plans de front; dans la figure 8, l'absence de la lettre V nous mettrait dans l'impossibilité de connaître le sens *au-dessus* par rapport aux plans horizontaux.

C'est pour de pareilles circonstances que nous aurons recours à la convention, mais dans la pratique, les indications traduites par les lettres H et V sont généralement connues par la nature du sujet que l'on étudie et ces lettres peuvent dès lors disparaître des dessins (nº 42).

Même dans les dessins purement théoriques, nous pourrons nous dispenser généralement de placer les lettres H et V (nº 40, 3º).

V. — *Enfin, nous conviendrons de choisir comme partie de l'espace située à droite d'un plan de profil, celle qui renferme l'œil droit d'un observateur qui serait placé dans le dièdre limité par la face de dessus d'un plan horizontal quelconque* α *et la face d'avant d'un plan de front quelconque* β, *qui aurait les pieds sur le plan horizontal* α, *les yeux tournés vers le plan de front* β, *ces yeux se trouvant de part et d'autre du plan de profil.*

On voit donc que dans les figures 6, 7 et 8, le sens *à droite* pour les plans de profil est indiqué par la flèche f et que ce sens est déterminé par les sens *au-dessus* et *en avant* arrêtés respectivement pour les plans horizontaux et pour les plans de front.

Il en résulte que dans un plan horizontal de projection, pour lequel on connaît le sens *au-dessus* par le dessin et le sens *en avant* des plans de front par une parallèle α^h à la ligne de terre et la lettre H, on connaît aussi le sens *à droite* pour les plans de profil, *sans qu'il soit jamais nécessaire d'indiquer ce sens.*

De même, si l'on a un plan vertical de projection pour lequel on connaît le sens *en avant* par le dessin et le sens *au-dessus* des plans horizontaux par une parallèle β^v à la ligne de terre et la lettre V, on connaît aussi le sens *à droite* pour les plans de profil, *sans qu'il soit jamais nécessaire d'indiquer ce sens.*

THÉORÈME III.

17. *Un point et sa projection sur un plan* α *sont simultanément dans la même partie de l'espace par rapport à un plan* β *perpendiculaire au précédent, ou dans ce plan* β.

Nous ne donnons ce théorème, trop simple pour être démontré, que parce qu'il nous permet d'en tirer les conclusions pratiques suivantes :

1° *Selon qu'un point est au-dessus ou au-dessous d'un plan horizontal ou dans ce plan, sa projection verticale se trouve au-dessus ou au-dessous du plan horizontal ou sur la projection verticale du plan horizontal et réciproquement.*

2° *Selon qu'un point est en avant ou en arrière d'un plan de front ou dans ce plan, sa projection horizontale se trouve en avant ou en arrière du plan de front, ou sur la projection horizontale du plan de front et réciproquement.*

Ainsi dans la figure 9, les points A et B sont respectivement au-dessus et au-dessous du plan horizontal α, ou tous les deux au-dessous du plan horizontal β, ou tous les deux au-dessus du plan horizontal γ; dans la figure 10, les points A et B sont respectivement en arrière et en avant du plan α, ou tous les deux en avant du plan β, ou tous les deux en arrière du plan γ.

Dans la figure 9, le point C est dans le plan γ; dans la figure 10, le point D est dans le plan α.

Du reste, dans la figure 9, le plan β est au-dessus des plans α et γ, le plan α est au-dessous de β et au-dessus de γ, le plan γ est au-dessous des plans α et β; dans la figure 10, le plan β est en arrière des plans α et γ, le plan α est en avant de β et en arrière de γ, le plan γ est en avant de α et β (n° 15).

§ 2. BUT DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, SON UTILITÉ ET SON IMPORTANCE.

But de la Géométrie Descriptive. — **18.** La Géométrie Descriptive a pour but de représenter, sans indétermination, sur une surface, au moyen du dessin géométrique, accompagné des explications nécessaires, n'importe quelle figure déterminée géométriquement dans l'espace. Elle permettra donc aussi de représenter, dans les mêmes conditions, toutes les constructions que la Géométrie indique comme devant être exécutées dans l'espace pour résoudre les problèmes que l'on peut se proposer sur les figures.

Épure. — **19.** Dans ce Cours nous supposerons que la surface sur laquelle on a effectué la représentation d'une ou de plusieurs figures de l'espace, soit toujours plane. On lui donne le nom d'*épure*.

Différence entre la Géométrie et la Géométrie Descriptive. — **20.** Il importe de bien établir la différence entre la Géométrie et la Géométrie Descriptive. Dans la Géométrie, le but qu'on a en vue, bien différent de celui que nous avons indiqué au numéro 18, est d'étudier les propriétés des figures et de chercher comment on peut mesurer leur étendue; toutes les études, analytiques ou autres, qui ont cet objet, sont du domaine de la Géométrie. Celle-ci pourra se servir, pour ses recherches propres, de la représentation exacte que fournit la Géométrie Descriptive, et elle y trouvera parfois de grands avantages; mais en conclure, comme beaucoup d'auteurs l'ont fait, que la Géométrie Descriptive a aussi pour objet d'étudier les propriétés des figures serait, pensons-nous, confondre deux choses essentiellement distinctes, comme la conception d'un projet et sa traduction graphique.

21. Prenons par exemple, le problème où l'on cherche la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan. La Géométrie recherchera la série des opérations que l'on devrait faire dans l'espace, ou la série des calculs que l'on devrait effectuer pour arriver à la solution du problème; quant à la Géométrie Descriptive, elle s'emparera des considérations géométriques et elle dira comment on pourra trouver, sans calculs, au moyen de constructions faites dans un plan, la plus courte distance de deux droites déterminées.

Utilité et importance de la Géométrie Descriptive. — **22.** Remarquons du reste que la plupart des constructions indiquées en Géométrie font abstraction de l'impénétrabilité de la matière et ne peuvent, en général, être exécutées que sur des figures identiques à celles que l'on considère sur les corps matériels, et que l'on aurait, au préalable, représentées à part dans l'espace, soit effectivement par des procédés fort coûteux, *soit indirectement par les procédés ingénieux de la Géométrie Descriptive* (*).

(*) *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1905, p. 247.

On peut donc, avec Lacroix (*), considérer la Géométrie Descriptive comme un complément de la Géométrie, et elle sera d'autant plus féconde qu'on possèdera dans cette dernière science des connaissances plus étendues.

23. La Géométrie Descriptive a pour l'ingénieur une importance considérable, car elle lui fournit les procédés nécessaires pour exécuter les divers problèmes de coupe des pierres, de charpente, d'ombres, de perspective, de fortification, etc.

Elle constitue une « langue nécessaire à l'homme de génie qui conçoit « un projet, à ceux qui doivent en diriger l'exécution et enfin aux artistes « qui doivent eux-mêmes en exécuter les différentes parties. » (**)

MONGE. — 24. Les méthodes de la Géométrie Descriptive sont dues en grande partie au génie créateur de l'illustre Monge (***), qui les enseigna pour la première fois à l'école du génie de Mézières (****).

Elles sont basées sur les propriétés projectives des figures (n°s 2 et s.).

(°) Né en 1765, mort en 1843.

(°°) MONGE. Géométrie Descriptive.

(°°°) Né en 1746, mort en 1818.

(°°°°) « . . . . il était défendu (à Monge) de faire connaître ses méthodes géométriques . . . .
« Tout le monde sait que ce ne fut qu'après la révolution de 1789, après la destruction de l'École du « génie de Mézières, et lors de la création de la première École normale, qui précéda la création de « l'École centrale des travaux publics, connue plus tard sous le nom d'École polytechnique, que « Monge publia son Traité de Géométrie Descriptive, dans lequel se trouvaient révélées toutes les « méthodes graphiques dont l'École de Mézières faisait un secret : et cependant un ouvrage, moins « complet il est vrai, avait déjà paru sur ce sujet important. Cet ouvrage avait été publié, sous le titre « de Complément de géométrie, par Lacroix, alors qu'il était professeur aux écoles d'artillerie.

« Il n'est pas sans intérêt, pour l'histoire des sciences, de rappeler comment le Complément de « géométrie a été écrit par Lacroix, et ce qui lui a donné naissance.

« Un officier du génie vint en congé à Besançon, où était une école d'artillerie ; Lacroix y était « professeur. Cet officier laissa dans sa chambre la collection de ses épures et s'absenta pour quelques « mois. Les officiers d'artillerie, qui avaient sur le cœur quelques plaisanteries, fort innocentes sans « doute sur leur ignorance des travaux de Mézières, résolurent de s'emparer du trésor de l'officier « du génie. Le complot fut exécuté, les épures enlevées furent calquées, et puis les originaux remis « à place. Mais grand fut l'étonnement lorsque, le travail fini, on voulut se mettre à déchiffrer les « hiéroglyphes de l'école de Mézières : personne n'y comprenait rien. Alors on va trouver Lacroix « et on lui remet tous les calques. Lacroix parvint à déchiffrer tout ce qui est relatif au point, à la « droite et au plan, et il rédigea sur ce sujet un petit traité qu'il fit publier sous le titre de Complément « de géométrie. » (OLIVIER. Cours de Géométrie Descriptive).

Voyez aussi la Préface, I et VII.

Division de ce Cours. — **25.** On a vu en Géométrie comment, par une abstraction de la pensée, on parvient à considérer le point comme engendrant la ligne et la ligne comme engendrant la surface. Si donc on veut représenter sur un plan, sans indétermination, une figure de l'espace (n° 18), on doit rechercher avant tout la manière de représenter sans indétermination sur un plan, un point de cette figure.

26. Or, quelle que soit la façon dont un point A est déterminé géométriquement, il le sera par rapport à des points, des lignes ou des surfaces; ces dernières figures seront elles-mêmes déterminées par rapport à d'autres points, d'autres lignes ou d'autres surfaces et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des figures parfaitement connues par elles-mêmes.

27. Nous verrons dans la suite de ce Cours que si une figure est parfaitement connue dans l'espace, on pourra pour tout point de cette figure et pour tout autre point qui serait finalement déterminé par rapport à elle :

1° Trouver la grandeur et la position de la perpendiculaire abaissée du point sur un plan parfaitement connu, puis représenter le point sans indétermination sur le plan de l'épure (n° 19). On arrive ainsi au système de représentation par *plans cotés* et par *perspectives axonométriques* que nous étudierons dans les Deuxième et Cinquième Parties de notre Cours (*).

2° Trouver les pieds des perpendiculaires abaissées du point sur deux plans parfaitement connus, puis représenter le point sans indétermination sur le plan de l'épure. On arrive ainsi au système de représentation par *projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires entre eux* que nous étudierons dans la Première Partie de notre Cours.

3° Trouver le point d'intersection d'un plan parfaitement connu avec une droite menée par le point considéré, suivant une loi donnée, puis représenter le point sans indétermination sur le plan de l'épure.

(*) F. Chomé. Cours de Géométrie Descriptive, 2me Partie, Plans Cotés. Bruxelles, Office de Publicité et Paris, Gauthier-Villars, 1904.

On arrive ainsi aux systèmes de représentation par *perspectives polaires* et *perspectives cavalières* que nous étudierons dans les troisième et quatrième Parties de notre Cours.

Important problème. — **28**. Du reste, quelle que soit la manière dont un point est déterminé par rapport à certaines figures, il pourra être considéré comme appartenant à trois surfaces déterminées.

Il résulte donc des considérations émises dans le numéro précédent, qu'un des problèmes les plus importants que la Géométrie Descriptive aura à résoudre, consistera dans la représentation des points communs à trois surfaces.

Nous verrons, dans le Premier Livre de cette Première Partie, comment on pourra représenter le point commun à trois plans et dans les Livres suivants, nous examinerons le même problème pour trois surfaces quelconques.

5

PREMIÈRE PARTIE.

PROJECTIONS ORTHOGONALES SUR DEUX PLANS PERPENDICULAIRES ENTRE EUX.

LIVRE PREMIER.

DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

CHAPITRE I.

Représentation du point, de la droite et du plan considérés isolément, ou l'un par rapport à chacun des autres.

§ I. DU POINT.

Détermination du point. — 29. Parmi toutes les figures qu'on peut supposer connues (n° 26), cherchons celles qui offrent le plus de facilité pour déterminer la position d'un point, en considérant que parmi toutes les figures simples que la Géométrie considère, il faut remarquer avant tout le point, la droite et le plan.

Si l'on connaît les distances d'un point M de l'espace à trois points connus A, B, C, non situés en ligne droite, le point M est l'un des points d'intersection de trois sphères dont les rayons et les centres sont connus. Nous savons que le nombre de ces points d'intersection est au plus égal à deux et il faudra que l'on sache distinguer entre ces deux points celui que l'on veut déterminer, en disant par exemple de quel côté se trouve le point M par rapport au plan des trois centres (n° 13).

Si l'on connaît les distances d'un point M de l'espace à trois droites

connues et non parallèles, *a*, *b*, *c*, le point M est l'un des points d'intersection de trois cylindres droits dont les axes et les rayons sont connus. L'analyse nous fait connaître que le nombre de ces points d'intersection est pair et au plus égal à huit, et il faudra dire comment on distinguerait entre ces huit points, celui que l'on veut déterminer.

Si l'on connaît les distances d'un point M de l'espace à trois plans connus et non parallèles deux à deux, α, β, γ, le point M est l'un des points d'intersection de six plans respectivement parallèles deux à deux à chacun des trois plans connus; nous savons que le nombre de ces points est égal à huit et il faudra que l'on sache distinguer entre ces huit points celui que l'on veut déterminer, en disant par exemple, de quel côté se trouve le point M par rapport à chacun des plans connus (nos 13 et suiv.).

« On voit donc que, quoique par rapport au nombre de ses « dimensions, le plan soit une figure moins simple que la droite qui n'en « a qu'une et que le point qui n'en a pas, il présente cependant plus « de facilité que le point et la droite pour la détermination d'un point « de l'espace... » (*). C'est pourquoi l'on adopte souvent, dans la pratique, un système de trois plans non parallèles deux à deux pour la détermination d'un point de l'espace; ces plans sont appelés *plans coordonnés*, ou *plans de repère*, ou *plans de comparaison*.

Angles mutuels des plans de repère. — **30.** Les considérations qui précèdent sont indépendantes de l'angle que chacun des plans coordonnés fait avec chacun des autres. Mais si cet angle est très obtus, il en est de même pour les plans parallèles qui déterminent un point M, et dans la pratique, de petites erreurs commises sur les distances aux plans de comparaison pourraient en amener de grandes dans la détermination de la position du point M. Pour éviter cette cause d'inexactitude et pour tenir compte aussi de ce que dans la plupart des corps que l'on a à considérer dans les Arts, on trouve toujours trois directions principales, celle des longueurs, celle des largeurs ou épaisseurs et celle des hauteurs, on choisit généralement des plans de repère perpendiculaires entre eux. Nous supposerons toujours, dans la suite, qu'il en est ainsi (n° 7).

(*) MONGE. Géométrie Descriptive.

Détermination du point par ses projections sur deux plans. — 31. Le procédé de détermination d'un point par ses distances à trois plans coordonnés est celui qu'on emploie ordinairement en Géométrie Analytique, où les sens *au-dessus*, *en avant* et *à droite* (nos 15 et 16) sont déterminés respectivement, pour chacun des trois plans de repère, par le sens positif des semi-droites parallèles à l'intersection des deux autres plans de comparaison, c'est-à-dire des semi-droites perpendiculaires au plan de repère considéré, dans le cas de plans coordonnés perpendiculaires entre eux.

Mais en vue d'arriver au but particulier que poursuit la Géométrie Descriptive, le procédé de détermination d'un point se modifie par suite de l'emploi des projections.

THÉORÈME IV.

32. *Si l'on considère* (fig. 11) *trois plans de repère bien connus,* AOA'B *ou* α, COC'B *ou* β, AOA'CC' *ou* γ *et que l'on prenne* (n° 7) *deux plans de projection* DLT *ou* H et ELT *ou* V *parallèles à deux des trois plans de repère, par exemple aux plans* α *et* β, *les projections* M^h *et* M^v *d'un point* M *sur* H *et* V *déterminent complètement ce point, sans qu'il soit nécessaire d'assigner aux plans de projection des positions fixes par rapport aux plans de repère et quels que soient les lieux de l'espace où l'on transporte chacun des plans* H et V.

On suppose que l'on connaît pour chacun des plans de projection :

1° *La direction de la ligne de terre* L T (n° 7),

2° *Les sens au-dessus et en avant d'où l'on déduit le sens à droite* (n° 16, III, IV et V),

3° *La projection du point* O *commun aux plans de repère.*

Arrêtons pour le plan H et pour tous les plans horizontaux le sens *au-dessus* qui est donné par la face sur laquelle on veut dessiner, arrêtons de même le sens *en avant* pour le plan V et pour tous les plans de front; plaçons dans le plan horizontal de projection, contre une parallèle à la ligne de terre, la lettre H indiquant dans ce plan le sens *en avant* pour tous les plans de front; plaçons de même dans le plan vertical de projection, contre une parallèle à la ligne de terre, la lettre V indiquant

dans ce plan le sens au-dessus pour tous les plans horizontaux. Le sens *à droite* pour les plans de profil est alors connu dans chacun des plans de projection sans qu'il doive être indiqué spécialement (n° 16, V).

Soient O^h et O^v les projections horizontale et verticale du point O commun aux plans de repère; le plan horizontal α a une projection verticale α^v parallèle à la ligne de terre et passant par O^v; le plan de front β a une projection horizontale β^h parallèle à la ligne de terre et passant par O^h, le plan de profil γ a comme projections les droites γ^h, γ^v, passant respectivement par O^h, O^v, et perpendiculaires à la ligne de terre en un même point L de cette ligne.

Soient M^h et M^v les projections horizontale et verticale du point M; le plan M^hMM^v ou δ qui contient les projetantes du point M est perpendiculaire à la fois à H et à V, donc il est perpendiculaire à la ligne de terre et est un plan de profil situé tout entier, avec le point M, à droite ou à gauche du plan γ. Les projections δ^h et δ^v, toutes deux perpendiculaires à la ligne de terre au même point de cette ligne, passent respectivement par M^h et M^v et sont également distantes des projections γ^h et γ^v du plan de profil passant par O; de plus, si la projection δ^h est à droite (ou à gauche) de γ^h, la projection verticale δ^v est à droite (ou à gauche) de γ^v.

Considérons maintenant séparément le plan H et le plan V, indépendamment de leurs positions primitives et transportés n'importe où dans l'espace.

En considérant le plan horizontal H, la projection horizontale M^h du point M permet de dire :

1° Que le point M est situé en avant (ou en arrière) du plan de front β (n° 17), à une distance connue de ce plan et égale à la distance M^hE de M^h à β^h (n° 11).

2° Que le point M est situé à droite (ou à gauche) du plan de profil γ, à une distance connue de ce plan et égale à la distance M^hG de M^h à γ^h.

En considérant le plan V, la projection verticale M^v du point M permet de dire :

1° Que le point M est situé au-dessus (ou au-dessous) du plan horizontal α, à une distance connue de ce plan et égale à la distance M^vF de M^v à α^v;

2° Que le point M est situé à droite (ou à gauche) du plan de profil γ, à une distance connue de ce plan et égale à la distance M^vI de M^v à γ^v.

Ainsi donc, quelles que soient les positions que l'on donne aux plans H et V dans l'espace, les deux projections permettent de fixer complètement le point M par rapport aux plans de repère connus α, β, γ, et déterminent ce point même surabondamment, puisque la distance du point M au plan de profil γ et sa position par rapport à ce plan sont données deux fois, une fois par la projection horizontale M^h et une fois par la projection verticale M^v.

THÉORÈME V.

33. *Pour que deux points* M^h *et* M^v *placés respectivement dans les plans de projection* H *et* V *soient les projections d'un point de l'espace, il faut et il suffit que ces points et les perpendiculaires correspondantes* M^hE, M^vF *à la ligne de terre se trouvent aux mêmes distances et simultanément à droite où à gauche des projections de même nom d'un autre point quelconque et du plan de profil correspondant.*

Car si les points M^h et M^v sont les projections d'un point M, il faut que les droites MM^h et MM^v soient des projetantes et déterminent un plan de profil dont la projection verticale et la projection horizontale doivent être perpendiculaires à la ligne de terre en un même point ; ces projections doivent donc se trouver aux mêmes distances et simultanément à droite ou à gauche des projections de même nom d'un autre plan de profil et de tout point appartenant à ce plan de profil.

D'autre part, si deux points M^h et M^v placés respectivement dans H et dans V, se trouvent aux mêmes distances et simultanément à droite ou à gauche des projections de même nom d'un autre point et du plan de profil correspondant, les perpendiculaires menées à la ligne de terre par M^h et M^v se coupent sur cette ligne et déterminent un plan de profil. Mais alors les perpendiculaires menées par M^h et M^v respectivement aux plans H et V appartiennent au plan de profil et se coupent nécessairement en un point M dont les projections sont précisément M^h et M^v.

Représentation d'un point M sur un plan unique. Convention usuelle. —
34. Puisque en transportant les plans H et V n'importe où dans l'espace, les projections M^h et M^v déterminent toujours parfaitement le point M par rapport aux plans connus α, β, γ (n° 33), nous pouvons porter les plans H et V sur un plan unique ϵ et le but (n° 20) de la Géométrie Descriptive sera atteint puisque le point M sera alors représenté par ses projections sans indétermination sur un plan ϵ qui sera le plan de l'épure.

Mais nous conviendrons toujours tout naturellement que dans le plan ϵ, la face de dessus du plan H se confond avec la face en avant du plan V (n° 16,I), de manière que la partie de l'espace située au-dessus de H se confonde avec la partie de l'espace située en avant de V. Il en résultera cet avantage que les deux projections pourront être lues sur la même face du plan de l'épure.

EXERCICE I. — 35. L'épure formée par les figures 12 et 13, permet de dire que le point M est situé en avant du plan de front mené par O, au-dessus du plan horizontal mené par O, à droite du plan de profil mené par O et à des distances connues de ces trois plans.

Dans l'épure formée par les figures 14 et 15, on peut dire que le point M est situé en arrière, au-dessous et à gauche du point O et à des distances connues des plans de repère menés par O.

Les commençants s'exerceront utilement à placer dans l'espace par rapport aux plans de repère menés par un point O, différents points dont ils se donneront arbitrairement les projections. Ils n'oublieront pas de placer d'abord dans les plans de projection, les directions de la ligne de terre et les lettres H et V avec leurs significations conventionnelles (n° 16); ils veilleront aussi à ce que les perpendiculaires à la ligne de terre menées par les deux projections d'un même point soient à la même distance des perpendiculaires à la ligne de terre menées par les projections du point O ou de tout autre point et simultanément à droite ou à gauche de ces dernières perpendiculaires.

36. Remarque. — Les projections d'un point M déterminent ce point par rapport aux plans de repère connus et se coupant en un point O,

ou bien par rapport à des plans parallèles aux plans de repère et passant par tout autre point quelconque N déjà représenté.

EXERCICE 2. — 37. Dans l'épure formée par les figures 12 et 13, puis dans celle formée par les figures 14 et 15, dire comment les points M, N et O sont placés l'un par rapport à l'autre.

Restitution d'un point de l'espace, connaissant les projections du point. —

38. Nous avons vu (n° 32 et 36) comment, au moyen des projections d'un point, on peut placer celui-ci dans l'espace par rapport à trois plans coordonnés passant par un autre point réprésenté et supposé connu. Mais on peut agir autrement et les praticiens procèdent généralement comme nous allons le dire.

Si l'on considère la projection horizontale dans l'épure (fig. 12 et 13), on prend le plan de l'épure comme un plan horizontal de projection et le point M se trouve alors sur une verticale menée par M^h, à une distance du plan horizontal α mené par un point connu O, égal à la distance de M^v à la projection verticale α^v du plan α, au-dessus (ou au-dessous) du plan α suivant que M^v se trouve au-dessus (ou au-dessous) de α^v (n° 17). Le point M est donc connu dans l'espace. Nous n'avons pas dessiné dans la figure 13, la projection α^v qui peut être menée par O^v parallèlement à la ligne de terre (n° 10).

Si l'on considère la projection verticale dans l'épure, on prend le plan de l'épure comme un plan vertical de projection et le point M se trouve alors sur une projetante debout menée par M^v, à une distance du plan de front β mené par un point connu O, égale à la distance de M^h à la projection horizontale β^h du plan β, en avant (ou en arrière) du plan β suivant que M^h se trouve en avant (ou en arrière) de β^h (n° 17). Le point M est donc connu dans l'espace. Nous n'avons pas dessiné dans la figure 12, la projection β^h qui peut être menée par O^h parallèlement à la ligne de terre (n° 10).

On voit donc que le praticien considère l'épure comme un plan horizontal ou comme un plan vertical de projection, suivant qu'il veut restituer le point M dans l'espace en partant de la projection horizontale M^h ou de la projection verticale M^v du point M.

Inutilité de la position absolue de la ligne de terre. — 39. Les deux

plans de projection sont parallèles à deux des trois plans de repère mais ils sont pour le surplus, absolument indéterminés par rapport à ces plans et s'il est nécessaire de donner la direction de la ligne de terre, il n'est pas du tout nécessaire de donner la position absolue de cette ligne, ni dans aucun des plans de projection, ni dans le plan de l'épure (nos 32 à 34). Aussi ne s'est-on jamais occupé de son tracé dans les applications de la Géométrie Descriptive aux Arts.

Néanmoins, depuis Monge jusque dans ces derniers temps, la position absolue de la ligne de terre a joué dans l'enseignement des méthodes de la Géométrie Descriptive un rôle considérable, mais injustifié, inutile et nuisible (Préface, p. IX, III).

Nous ne considérerons donc jamais que la direction de la ligne de terre dans toutes nos épures; mais rien n'empêche le lecteur d'en dessiner une pour chaque plan de projection, dans chacune de nos épures, même d'en dessiner successivement plusieurs pour chaque plan de projection, et si la direction de la ligne de terre était, dans le plan ϵ de l'épure, la même pour le plan H que pour le plan V, suivant l'usage habituel (n° 40), le lecteur pourrait aussi ne tracer dans l'épure qu'une seule droite qui servirait de ligne de terre pour chacun des plans de projection.

De même, toute épure exécutée en supposant une ligne de terre tracée dans chaque plan de projection, peut parfaitement être expliquée sans fixer les positions absolues des deux plans de projection, en considérant cette ligne non pas comme la projection horizontale du plan V ou comme la projection verticale du plan H, mais bien comme la projection horizontale d'un plan de front ou comme la projection verticale d'un plan horizontal.

Ces facultés sont laissées aux Candidats à l'École Militaire et constituent la meilleure preuve, *a posteriori,* de la complète inutilité de l'emploi de la ligne de terre dans l'enseignement (Appendice C).

Mise en concordance usuelle des projections horizontale et verticale d'une figure. — 40. Le plus souvent, les plans H et V placés dans le plan ϵ de l'épure de manière à confondre la face de dessus du plan H avec la face d'avant du plan V (n° 34), sont orientés dans le plan ϵ de façon à confondre (fig. 16) les directions des parallèles à la ligne de terre du

plan H et du plan V, les sens à droite de ces plans (nº 16, VI) et les deux projections d'un plan de profil quelconque α et par conséquent de tout autre plan de profil β, γ... (nº 10).

Dans la suite nous supposerons toujours qu'il en est ainsi.

Les avantages qui en résultent sont nombreux. Non seulement, on pourra lire chacune des projections sur une même face du plan de l'épure (nº 34), mais encore :

1º On n'aura plus à considérer dans le plan ε qu'une seule direction pour la ligne de terre du plan H et du plan V ;

2º Le sens *à droite* par rapport à un plan de profil quelconque sera le même pour chacun des plans de projection ;

3º La lettre H peut être placée, dans le plan H, contre une parallèle quelconque à la ligne de terre ; il en est de même pour la lettre V dans le plan V (nº 16, IV) ; donc nous pourrons écrire ces lettres dans le plan ε, contre une droite unique parallèle à la ligne de terre (fig. 17), mais elles devront être placées de part et d'autre de cette droite unique par suite de la confusion voulue des sens *à droite*.

Dans nos planches, nous supposerons toujours, sauf indication contraire, *que la ligne de terre est parallèle au bord inférieur du cadre et que la lettre* V *est placée au-dessus de la lettre* H (fig. 17); il en résulte que dans la plupart de nos épures, la direction de la ligne de terre, le sens au-dessus de H et en avant de V ne devront pas être indiqués explicitement.

4º Du théorème V (nº 33) nous pourrons tirer cette importante conclusion : *Pour que deux points* M^h *et* M^v *placés dans le plan de l'épure soient les projections d'un point* M *de l'espace, il faut et il suffit qu'ils se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de terre,* cette perpendiculaire représentant d'ailleurs les deux projections du plan de profil passant par le point M.

Ligne de rappel. — 41. Toute perpendiculaire à la ligne de terre et reliant les deux projections d'un même point de l'espace, a reçu le nom de *ligne de rappel.*

Remarques pratiques. — 42. Dans la pratique, la connaissance préa-

lable de la figure (édifice, machine, etc.) représentée dans l'épure, permet généralement de distinguer entre les deux projections celle qui doit être qualifiée de projection horizontale et celle qui doit être qualifiée de projection verticale, alors même que les dessins ne porteraient à cet égard aucune indication spéciale, de sorte qu'il sera souvent inutile de charger les signes employés pour désigner les points et les lignes, des exposants h et v qui permettent de distinguer les deux projections (nos 147 à 156).

On connaît aussi généralement dans les épures relatives aux arts de la construction, la direction de la ligne de terre par la projection d'un plan qu'on sait être horizontal ou de front, le sens en avant par rapport aux plans de front et le sens au-dessus par rapport aux plans horizontaux, sans que ces sens doivent être indiqués par les lettres H et V ou par d'autres artifices (n° 40).

Positions relatives des projections concordantes d'une figure. — 43. Chaque projection peut être déplacée dans l'épure perpendiculairement à la ligne de terre, de manière à rapprocher ou à éloigner les deux projections, à les enchevêtrer ou à les séparer, à placer la projection horizontale au-dessous ou au-dessus de la projection verticale, suivant les exigences de la pratique et les habitudes du dessinateur qui pourra employer, s'il le juge utile, des encres ou des crayons de couleurs différentes pour distinguer les deux projections quand celles-ci s'enchevêtrent (voir Préface, p. XIX, VIII).

Points dont chacun a ses projections confondues. — 44. Un point quelconque A^{hv} (fig. 18) du plan de l'épure peut être considéré comme étant simultanément la projection horizontale et la projection verticale d'un point A de l'espace (n° 43). La situation dans l'espace d'un pareil point A serait facile à déterminer par rapport à tout autre point représenté dans l'épure.

Premier et second plan bissecteur. — 45. Si nous considérons un point A à projections confondues A^{hv}, ainsi que le plan horizontal α et le plan de front β passant par A, les projections α^v et β^h sont aussi confondues sur une droite unique parallèle à la ligne de terre et passant par A^{hv} (n° 10).

Les deux plans α et β, que l'on doit toujours considérer comme indéfinis dans tous les sens, forment (fig. 18 et 19) quatre dièdres droits qui correspondent à quatre régions distinctes de l'espace. Appelons *1re région*, celle qui est située au-dessus de α et en avant de β; *2e région*, celle qui est située au-dessus de α et en arrière de β; *3e région*, celle qui est située au-dessous de α et en arrière de β; *4e région*, celle qui est située au-dessous de α et en avant de β.

Nous appellerons *premier plan bissecteur*, le plan bissecteur des dièdres renfermant les régions impaires ; *second plan bissecteur*, le plan bissecteur des dièdres renfermant les régions paires.

Le théorème suivant démontre que le second plan bissecteur est le même quel que soit le point A à projections confondues.

THÉORÈME V.

46. *Le lieu des points, ayant chacun ses projections confondues, est un plan unique, second bissecteur pour l'un quelconque des points considérés.*

En effet, si l'on prend un point A à projections confondues A^{hv} (fig. 18), tout autre point B, ou C, ou D, à projections confondues, est également distant du plan horizontal α et du plan de front β passant par le premier point A, donc il est dans un des plans bissecteurs des dièdres formés par les plans α et β. Du reste, il doit se trouver, ou bien dans les plans α et β, c'est-à-dire sur leur intersection comme en C; ou bien au-dessus de α et en arrière de β, c'est-à-dire dans la deuxième région formée par ces plans, comme en B; ou bien au-dessous de α et en avant de β, c'est-à-dire dans la quatrième région formée par ces plans, comme en D. On peut donc dire que tous les points à projections confondues se trouvent dans le second plan bissecteur pour l'un quelconque de ces points.

La réciproque se démontre avec la plus grande facilité.

47. Remarques. — On mettrait tout aussi aisément en évidence le caractère auquel on reconnaîtrait dans l'épure, les points du premier plan bissecteur correspondant à un point à projections confondues. Ce

premier plan bissecteur change avec le point auquel il se rapporte, contrairement à ce qui se passe pour le second plan bissecteur.

On pourrait aussi considérer les régions déterminées par un plan horizontal et un plan de front quelconques ainsi que les plans bissecteurs des dièdres correspondants et chercher le caractère auquel on reconnaîtrait les points situés dans ces derniers plans, mais il n'y aurait à cela aucune utilité pratique et la question serait du reste bien facile à traiter.

Enfin, si la projection horizontale et la projection verticale d'une figure ne sont pas en concordance, tout en étant tracées dans un même plan ϵ, (n° 34), alors tout plan de profil est représenté par deux projections dont l'une est perpendiculaire à la ligne de terre de la projection horizontale et dont l'autre est perpendiculaire à la ligne de terre de la projection verticale. Si l'on cherche dans ce cas, le lieu des points dont chacun à ses projections confondues, on trouve une droite dont les deux projections sont confondues sur la bissectrice des semi-droites perpendiculaires aux deux directions de la ligne de terre et représentant deux à deux les projections d'un même plan de profil. Cette droite varie avec l'angle que font entre elles les deux directions de la ligne de terre ; elle varie aussi, tout en restant parallèle à elle-même, avec la position des projections d'un premier plan de profil. (*)

APPLICATION I.

48. *On connaît, dans une épure (fig. 20), les projections d'un point* A *(n° 40) :*

On demande de marquer les projections d'un nouveau point B *dont on connaît les distances au plan horizontal et au plan de front du point* A, *sachant que ce nouveau point doit être situé :*

1° Au-dessus et en avant du point A*;*

2° » en arrière » ;

3° Au-dessous et en avant » ;

4° » en arrière » ;

(*) *Intermédiaire des mathématiciens*, 1907, p. 170, n° 3250.

5° Dans le second plan bissecteur, au-dessus et en arrière du point A;
6° » » » *au-dessous et en avant* »
7° » » » *et dans le plan du front* »
8° » » » » *horizontal* »
9° En avant du point A *et dans le plan horizontal du point* A;
10° En arrière » » » » ;
11° Au-dessus » » *de front* » ;
12° Au-dessous » » » » .

Les numéros 10, 12, 17, 40 et 44 permettent de traiter cette application.

Nous rappellerons toutefois que pour le 5°, le 6°, le 7° et le 8°, les projections du point demandé doivent être confondues (n° 44); que pour le 7°, le 11° et le 12° le plan de front du point A a une projection horizontale passant par A^h et parallèle à la ligne de terre (n° 10); que pour le 8°, le 9° et le 10°, le plan horizontal du point A a une projection verticale passant par A^v et parallèle à la ligne de terre (n° 10).

APPLICATION II.

49. *On demande comment est placé chacun des points représentés dans la figure 20, par rapport à l'un d'entre eux (n°s 12 et 17).*

Exercice général. — 50. *Chaque fois que par la suite, on aura à considérer un point dans une question quelconque, on s'exercera à traiter la question, quelles que soient les positions des projections du point.*

Langage usuel. — 51. Il nous arrivera fréquemment, dans la suite de ce Cours, sous forme de problème, d'application ou d'exercice, de demander, de prendre, de construire ou de déterminer un point; de demander, de prendre, de construire, de mener ou de déterminer une ligne ou une surface. Nous entendrons vouloir ainsi la représentation sur une épure, du point, de la ligne ou de la surface.

§ 2. DE LA DROITE.

Projections d'une figure située dans un plan de profil. — 52. Les deux projections d'un plan de profil δ (fig. 11), sur les deux plans H et V,

sont perpendiculaires à la ligne de terre en un même point de cette ligne; elles sont donc confondues dans nos épures (fig. 20) sur une même ligne de rappel (n[os] 40 et 41).

Il résulte de ce qui précède, *que toute figure plane située dans un plan de profil, a dans une épure, ses deux projections confondues sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre.*

Réciproquement, *toute figure qui, dans une épure, a ses deux projections confondues sur une même droite perpendiculaire à la ligne de terre, se trouve dans un plan de profil.*

53. Une ligne située dans un plan de profil n'est ni déterminée ni représentée par ses projections, à moins qu'on n'en représente les points qui la déterminent, comme par exemple, deux points pour une ligne droite (n° 62) ; trois points, ou un point et le centre pour une circonférence ; cinq points pour une conique ; etc.

Nous verrons plus loin (n° 260) comment une ligne de profil peut toujours être déterminée dans l'espace.

Détermination et représentation d'une ligne quelconque. — 54. Si l'on donne (fig. 22) dans une épure, la projection horizontale l^h et la projection verticale l^v d'une ligne l, qui n'a nulle part, deux ou plusieurs points dans un même plan de profil, cette ligne sera parfaitement déterminée dans l'espace, puisque tous les points en seront déterminés par leurs projections correspondantes (n° 32). Il s'ensuit que cette ligne l sera représentée sans indétermination sur une épure, au moyen de sa projection horizontale et de sa projection verticale.

PROBLÈME I.

55. *Marquer les projections d'un point quelconque* A *appartenant à une ligne* l *donnée par ses deux projections et non située dans un plan de profil.*

Il suffit (fig. 22) de prendre sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, deux points A^h et A^v appartenant respectivement aux deux projections l^h et l^v de la ligne l.

Le point B est celui où la ligne *l* traverse le second plan bissecteur (n° 46).

Remarque. — Nous verrons plus loin, comment on fixerait un point sur une ligne située dans un plan de profil (n°s 104 et 260).

THÉORÈME VI.

56. *La projection d'une ligne droite, sur un plan, est une droite, sauf quand la droite donnée est perpendiculaire au plan : dans ce cas, sa projection se réduit à un point.*

Soit (fig. 23) *d* une droite perpendiculaire en A, au plan α. En abaissant de différents points pris sur *d*, des perpendiculaires sur le plan α, toutes ces perpendiculaires sont confondues avec *d* et leurs pieds sont confondus en A; A est donc la projection de *d* (n° 2).

Soit maintenant une droite AC (fig. 24) non perpendiculaire au plan α. Abaissons du point A une perpendiculaire AA′ sur α, le plan CAA′ coupera le plan α suivant une droite A′C′ et je dis que A′C′ est la projection sur α, de la droite AC. Car si d'un point B de la droite, nous abaissons une perpendiculaire sur α, cette perpendiculaire doit être située dans le plan CAA′ et ne saurait rencontrer le plan α, qu'en un point B′ de A′C′; d'autre part, si d'un point B′ de A′C′, on élève une perpendiculaire sur α, cette perpendiculaire sera située dans le plan CAA′ et rencontrera AC en un certain point B. On voit que A′C′ est bien le lieu des projections de tous les points de AC (n° 2).

Corollaire. — Nous savons qu'une droite est déterminée par deux points et, par conséquent, la projection d'une droite sur un plan, est déterminée par les projections sur ce plan, de deux points de la droite.

PROBLÈME II.

57. *Représenter une droite passant par deux points donnés* (fig. 25).

Pour avoir la projection horizontale et la projection verticale de la droite, il suffit de joindre les projections horizontales des deux points, ainsi que les projections verticales.

Si les projections des deux points sur un plan étaient confondues, la droite passant par ces points serait perpendiculaire au plan de projection.

Plans projetants d'une droite. — **58**. Le plan vertical mené par une droite qui n'est pas perpendiculaire au plan horizontal, est le *plan projetant* la droite horizontalement. Le plan debout, mené par une droite non perpendiculaire au plan vertical de projection, est le *plan projetant* la droite verticalement.

EXERCICE III. — **59**. Dire, en considérant les plans projetants, comment sont situées, par rapport aux plans de projection, les droites *d* dont les projections sont marquées sur les figures 26, 27 et 28. On sait que dans la figure 26, d^v est parallèle à la ligne de terre; que dans la figure 27, d^h est parallèle à la ligne de terre et que dans la figure 28, d^v et d^h sont toutes deux parallèles à la ligne de terre.

THÉORÈME VII.

60. *Si l'on donne dans une épure* (fig. 37), *les projections d'une droite* d *perpendiculaire à un des plans de projection* H, *la projection* d^h *sur le plan* H *sera un point, et la projection* d^v *sur l'autre plan* V *sera une droite perpendiculaire à la ligne de terre et passant par* d^h.

Si l'on considère deux points sur la droite donnée *d*, le théorème résulte clairement de ce qui a été dit aux numéros 40 et 57.

La figure 33 représente les projections d'une droite *d* perpendiculaire au plan V.

THÉORÈME VIII.

61. *Quand, sur une épure, une des projections d'une droite est perpendiculaire à la ligne de terre, l'autre projection est une droite confondue avec la première projection, ou bien elle est réduite à un point situé sur cette première projection.*

Ce théorème résulte encore clairement de ce qui a été dit aux numéros 40 et 56.

Remarque. — Les figures 29, 30 et 31 ne sauraient représenter une droite de l'espace.

Droite de profil. — **62.** Les deux projections d'une droite située dans un plan de profil et non perpendiculaire à un plan de projection, ne suffisent pas pour déterminer la droite (n° 53): on peut, pour la fixer, en donner deux points A et B (fig. 32).

THÉORÈME IX.

63. *Deux droites quelconques d^h et d^v* (fig. 40), *dont aucune n'est perpendiculaire à la ligne de terre, peuvent être prises respectivement pour la projection horizontale et pour la projection verticale d'une droite de l'espace.*

En effet, le plan α mené par d^v perpendiculairement au plan vertical, et le plan β mené par d^h perpendiculairement au plan horizontal, ne sauraient être parallèles; car sinon, β parallèle à α, serait perpendiculaire au plan vertical, et comme il l'est déjà au plan horizontal, β serait perpendiculaire à la ligne de terre, donc d^h devrait l'être aussi, ce qui est contre l'hypothèse. Les plans α et β devant se couper, on voit que d^v et d^h peuvent être considérées comme les projections d'une droite de l'espace.

Définitions. — **64.** Une *horizontale* est une droite parallèle au plan horizontal H; une *droite de front* ou *frontale* est une droite parallèle au plan vertical de projection V.

Une *verticale* est une droite perpendiculaire au plan horizontal H; une droite *debout* est une droite perpendiculaire au plan vertical de projection V.

APPLICATION III.

65. *On demande de représenter une droite dans les diverses positions qu'elle peut occuper par rapport aux plans de projection* H *et* V.

1° Supposons que la droite d soit parallèle au plan horizontal.

a) Elle pourra être, dans ce cas, perpendiculaire au plan V : sa projection verticale d^v sera alors (n° 60) un point, et sa projection hori-

zontale d^h, perpendiculaire à la ligne de terre, passera par la projection verticale (fig. 33).

b) Si l'horizontale *d* est parallèle à la ligne de terre, ses projections seront parallèles à la ligne de terre et pourront être distinctes (fig. 34) ou confondues (fig. 35). Dans ce dernier cas, la droite appartiendra au second plan bissecteur (n° 46).

c) Si l'horizontale n'est ni perpendiculaire au plan vertical, ni parallèle à la ligne de terre, sa projection horizontale ne sera ni parallèle, ni perpendiculaire à la ligne de terre, mais sa projection verticale sera parallèle à cette ligne (fig. 36). On dit alors que l'horizontale est *quelconque* et que sa projection horizontale est *quelconque*.

2° Supposons que la droite donnée *d* soit parallèle au plan vertical.

a) Elle pourra être perpendiculaire au plan horizontal : sa projection horizontale sera, dans ce cas (n° 60), un point et sa projection verticale, perpendiculaire à la ligne de terre, passera par la projection horizontale (fig. 37).

b) La droite de front pourra être parallèle à la ligne de terre, elle pourra alors occuper une des positions déjà indiquées (1°, *b*) et représentées dans les figures 34 et 35.

c) Si la frontale n'est ni perpendiculaire au plan horizontal, ni parallèle à la ligne de terre, sa projection verticale ne sera ni parallèle, ni perpendiculaire à la ligne de terre, mais sa projection horizontale sera parallèle à cette ligne (fig. 38). On dit alors que la droite de front est *quelconque* et que sa projection verticale est *quelconque*.

3° Si la droite *d* est située dans un plan de profil, sans être perpendiculaire à un des plans de comparaison, ses projections, confondues sur une perpendiculaire à la ligne de terre, ne suffiront pas pour la déterminer, à moins qu'on n'en donne (n° 62) deux points A et B (fig. 32), ou à moins qu'on ne dise qu'elle appartient au second plan bissecteur.

4° Si la droite était située dans le second plan bissecteur sans être parallèle ou perpendiculaire à la ligne de terre, ses deux projections seraient confondues (fig. 39), sans être parallèles ou perpendiculaires à cette ligne. On dit alors que la droite est située *d'une manière quelconque dans le second plan bissecteur* et que ses projections confondues sont *quelconques*.

5° Une droite, n'occupant aucune des positions que nous venons d'examiner, sera dite *quelconque* et ses projections, différentes de celles que nous avons obtenues précédemment, seront dites *quelconques* (fig. 40).

APPLICATION IV.

66. *On demande comment est placée, par rapport aux plans de projection* H *et* V, *chacune des droites représentées dans les fig. 32 à 40.*

Nous avons examiné au numéro 65, toutes les positions qu'une droite peut occuper, dans l'espace, par rapport aux plans de projection, et pour chacune de ces positions, nous avons obtenu des projections essentiellement distinctes de celles qu'on obtient pour une autre position de la droite; nous pouvons donc réciproquement, déterminer sans ambiguïté, la position d'une droite par rapport aux plans H et V, à l'inspection des projections de cette droite (*).

Remarques. — **67.** I. — Quand une droite est parallèle à un plan de projection, elle est parallèle à sa projection sur ce plan.

II. — Quand une droite est parallèle à un plan de projection, toute longueur, prise sur la droite, est projetée sur ce plan, suivant une longueur égale. Ainsi, dans la figure 38, la distance des points A et B est égale à la distance A^vB^v.

APPLICATION V.

68. — *Marquer les points où une droite, non située dans un plan de profil, traverse le second plan bissecteur.*

Il suffira de prendre, sur la droite, le point dont les projections sont confondues (n° 46).

Remarques. — **69.** I. — Si la droite donnée était perpendiculaire à un des plans de projection, le point où elle rencontre le second

(*) « Si l'énoncé d'un théorème renferme toutes les hypothèses que l'on peut faire sur un sujet déterminé, et si chaque hypothèse conduit à une conclusion différente, les réciproques du théorème sont vraies. » (Éléments de Géométrie, par EUGÈNE CATALAN).

« Lorsque, dans une proposition ou dans une série de propositions, on a fait toutes les hypothèses admissibles, et que ces hypothèses ont conduit à des conclusions respectives essentiellement distinctes, les réciproques des propositions établies sont toutes vraies, » (Traité de Géométrie élémentaire, par ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE).

plan bissecteur, pourrait encore se représenter aisément, mais nous traiterons plus loin (n°s 134, 135 et 266), le cas où la droite donnée est située d'une manière quelconque dans un plan de profil.

II. — Nous résoudrons au numéro 133, le problème général qui a pour but de déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan.

Exercice général. — **70.** *Chaque fois que par la suite, on aura à considérer une droite dans une question quelconque, on s'exercera à traiter la question, en prenant la droite dans l'une ou l'autre des positions indiquées au numéro 65.*

PROBLÈME III.

71. *Représenter deux droites* d *et* d' *qui se coupent et qui ne soient pas situées dans un plan de profil* (fig. 41).

Il faut que la projection verticale du point d'intersection se trouve sur les projections verticales des deux droites, donc à leur rencontre; de même, la projection horizontale du point d'intersection doit se trouver à la rencontre des projections horizontales des deux droites; enfin, ces deux points de rencontre doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (n° 40, 4°).

Si, réciproquement, les projections de deux droites sont telles, que le point de rencontre des projections verticales se trouve sur une même perpendiculaire à la ligne de terre avec le point de rencontre des projections horizontales, ces deux points de rencontre déterminent, dans l'espace, un point commun aux deux droites et celles-ci se coupent (n° 102).

Remarque. — Nous verrons plus loin comment on constate que deux droites situées dans un plan de profil se coupent (n°s 98, 126 et 264).

PROBLÈME IV.

72. *Représenter deux droites parallèles,* d *et* d', *non situées dans des plans de profil* (fig. 42).

Il faut et il suffit que les projections de mêmes noms des deux droites soient parallèles. On le démontrera facilement.

Remarque. — Nous verrons plus loin comment on constate que deux droites situées dans des plans de profil sont parallèles (nos 98, 126 et 264).

PROBLÈME V.

73. *Par un point* A, *mener une parallèle à une droite donnée* d, *non située dans un plan de profil.*

Il suffit de mener par chacune des projections du point A, une parallèle à la projection de même nom de la droite *d* (n° 72).

Remarque I. — Il sera bien facile de mener, par un point, une parallèle à une droite qui serait perpendiculaire à l'un des plans de projection (n° 60).

Remarque II. — Nous verrons plus loin comment on peut mener, par un point, une parallèle à une droite quelconque située dans un plan de profil (nos 127 et 261).

APPLICATION VI.

74. *Démontrer qu'une droite, dont les deux projections sont parallèles, est parallèle au second plan bissecteur et réciproquement.*

APPLICATION VII.

75. *Démontrer qu'une droite, dont les deux projections font avec une parallèle à la ligne de terre, de part et d'autre de cette ligne et dans le même sens, des angles égaux, est parallèle à tous les premiers plans bissecteurs et réciproquement.*

THÉORÈME X.

76. *Pour que deux droites* a *et* b (fig. 43), *perpendiculaires entre elles, se projettent sur un plan* α, *suivant deux droites* a' *et* b' *aussi perpendiculaires entre elles, il faut et il suffit que l'une des droites* a *et* b *soit parallèle au plan de projection, sans que l'autre soit perpendiculaire à ce plan.*

Supposons que la droite *a* soit parallèle au plan α : elle sera alors

parallèle à a', donc perpendiculaire à II′ et, comme elle est perpendiculaire à b, elle sera perpendiculaire au plan bII′b'. On voit que a', parallèle à a, sera aussi perpendiculaire au plan bII′b', et par conséquent, a' sera perpendiculaire à b'.

Supposons maintenant que a et b doivent se projeter suivant deux perpendiculaircs a' et b' et que a ne soit pas parallèle au plan α. Alors, a' perpendiculaire à b' et à II′, est perpendiculaire au plan b'II′b, donc sa parallèle c, menée par I, sera perpendiculaire au même plan et, par conséquent, c sera perpendiculaire à b. On en conclut que b, perpendiculaire à c et à a, est perpendiculaire au plan aII′a' et comme b' l'est aussi, b est parallèle à b' et au plan α.

Cette démonstration suppose qu'aucune des droites données n'est perpendiculaire au plan α.

Corollaires. — I. Deux droites perpendiculaires entre elles, ne sauraient se projeter suivant deux perpendiculaires, sur un plan qui ne serait pas parallèle à l'une des droites.

II. Deux droites tracées dans un plan et perpendiculaires entre elles, ne sont jamais les projections sur ce plan, de deux droites perpendiculaires entre elles et dont aucune ne serait parallèle au plan.

APPLICATION VIII.

77. *D'un point* A, *abaisser une perpendiculaire sur une droite* d *parallèle à l'un des deux plans de projection.*

Si la droite d est perpendiculaire à un plan de projection, par exemple (fig. 44) au plan horizontal, on a immédiatement la projection horizontale de la perpendiculaire p abaissée du point A sur la droite d; la projection verticale de p sera du reste (n° 76) parallèle à la ligne de terre et P sera, sur la droite d, le pied de la perpendiculaire p.

On examinera facilement le cas où le point A et la droite d sont dans un plan perpendiculaire au plan de projection parallèle à d.

Si nous supposons (fig. 45) que la droite d n'est ni verticale, ni de bout, et que le plan (A, d) ne soit pas perpendiculaire au plan de projection parallèle à d, la perpendiculaire p abaissée du point A sur d

aura (nº 76) une projection horizontale p^h perpendiculaire sur d^h et une projection verticale p^v déterminée par les projections verticales du point A et du point de rencontre P de la droite d avec la perpendiculaire p.

Remarque. — L'application précédente rentre dans un problème plus général que nous résoudrons plus loin et dans lequel on demande d'abaisser d'un point une perpendiculaire sur une droite (nos 131 et 268).

§ 3. DU PLAN.

Surface. — **78.** On désigne sous le nom de *surface*, le lieu engendré par une ligne, appelée *génératrice,* variable ou non de forme et de grandeur et qui se déplace d'après une loi déterminée (nº 25).

Surface réglée. — **79.** On appelle *surface réglée,* toute surface pour laquelle la génératrice peut être rectiligne.

Ainsi (fig. 46) la droite g se mouvant de manière à s'appuyer constamment sur deux droites d_1, d_2 non situées dans un même plan et à rester toujours parallèle au plan α, engendre une surface connue sous le nom de *paraboloïde hyperbolique*. De même (fig. 47), la droite g se mouvant de manière à s'appuyer toujours sur trois droites d_1, d_2, d_3, non situées deux à deux dans un même plan et non parallèles à un même plan, engendre une surface connue sous le nom de *hyperboloïde réglé* ou *hyperboloïde à une nappe*.

Surface de révolution. — **80.** On donne le nom de *surface de révolution* à toute surface pour laquelle la génératrice mobile g, invariablement liée à une droite fixe a appelée *axe,* se meut de manière qu'un de ses points M reste dans un plan perpendiculaire à l'axe (fig. 48).

Dire que la génératrice g est invariablement liée à l'axe a, c'est dire que la figure (a, g) reste toujours identique à elle-même, c'est donc dire que les distances des différents points de g à l'axe restent constantes ainsi que les distances entre les plans menés perpendiculairement à l'axe par les différents points de g.

Or, le point M se meut par hypothèse, dans un plan perpendiculaire à a, il en est donc de même de tout autre point de g et par suite,

le point M comme tout autre point de la génératrice décrit, dans un plan perpendiculaire à l'axe *a* et appelé *plan du mouvement,* une circonférence dont le centre est l'intersection de ce plan avec l'axe et dont le rayon est la distance du centre au point mobile.

On dit souvent que la génératrice d'une surface de révolution *tourne* ou exécute un *mouvement de rotation* autour de l'axe de la surface.

Surfaces industrielles. — **81.** Les surfaces réglées peuvent être exécutées au moyen de la règle et du cordeau, les surfaces de révolution peuvent être exécutées sur le tour; les unes et les autres peuvent donc être exécutées facilement et c'est pourquoi elles sont, hormis les cas tout à fait exceptionnels, *les seules en usage dans les applications industrielles.*

Génération du plan. — **82.** On démontre, en Géométrie, que le plan est déterminé par deux droites qui se coupent, ou par deux droites parallèles, ou par une droite et un point, etc.

On en conclut :

1° Que le plan peut être engendré par une droite *g,* appelée génératrice, se déplaçant de manière à s'appuyer constamment sur deux droites fixes d_1 et d_2 qui se coupent ou qui sont parallèles et qu'on appelle *directrices* (fig. 49 et 50) ;

2° Que le plan (fig. 51) peut être engendré par une droite *g,* appelée génératrice, se déplaçant de manière à s'appuyer constamment sur une droite fixe *d,* appelée *directrice,* et à rester toujours parallèle à elle-même ;

3° Que le plan peut être engendré par une droite *g,* appelée *génératrice* (fig. 52), se déplaçant de manière à s'appuyer constamment sur une droite fixe *d,* appelée *directrice*, et à passer par un point fixe A.

Remarques. — **83.** I. — Une directrice d'un plan est une droite prise arbitrairement dans le plan; on peut donc toujours lui substituer une autre directrice prise parmi les génératrices du plan.

II. — Quand un plan est donné par une droite et un point, la parallèle menée par ce point à la droite, ou bien la droite que l'on obtient en joignant le point donné à un point quelconque de la droite donnée, peut être prise comme seconde directrice du plan.

III. — Un plan peut être donné par trois points, ce qui revient à donner dans le plan deux directrices, en joignant l'un des points aux deux autres, ou en menant par l'un des points, une parallèle à la droite menée par les deux autres points.

IV. — Un plan peut être engendré de beaucoup d'autres manières : ainsi un plan peut être engendré par une droite, perpendiculaire à une autre droite, et se déplaçant de manière à rester toujours perpendiculaire à cette autre droite au même point, etc. ; mais il n'y a aucune utilité à insister sur ces divers modes de génération.

V. — La projection d'un plan α vertical ou debout, sur le plan de projection qui lui est perpendiculaire, détermine le plan α (n°s 2 et 9).

Représentation d'une surface. — **84.** *Pour représenter une surface quelconque, on représente les figures qui la déterminent* (n°s 26 à 28), en ayant soin d'ajouter, oralement ou par écrit, comment on peut engendrer la surface au moyen de ces figures. Ainsi (fig. 53 et 54), un plan sera représenté par les projections de deux droites *a* et *b* qui se coupent, ou (fig. 55) de deux droites *a* et *b* parallèles, ou (fig. 56) d'une droite *a* et d'un point A, ou de trois points, etc.

85. Tout plan, perpendiculaire à un plan de projection, est représenté par sa projection sur ce plan (n° 83, V).

C'est ainsi que les figures 57, 58, 59, 60 et 61 représentent successivement :

1° Un plan de profil α,

2° Un plan de front α,

3° Un plan vertical qui n'est ni de front ni de profil,

4° Un plan horizontal α,

5° Un plan debout qui n'est ni horizontal ni de profil.

Le second plan bissecteur (n° 46) ne demande aucune représentation, car tout point placé dans le plan de l'épure peut être considéré comme la projection horizontale et la projection verticale d'un point du second plan bissecteur.

Horizontales et frontales d'un plan. — **86.** Toute génératrice parallèle au plan horizontal et prise dans un plan α non parallèle au plan horizontal, est appelée *horizontale* du plan α.

Toutes les horizontales d'un plan sont parallèles entre elles; leurs projections horizontales sont donc aussi parallèles entre elles et leurs projections verticales sont parallèles à la ligne de terre.

87. Toute génératrice parallèle au plan vertical et prise dans un plan α non parallèle au plan vertical, est appelée *frontale* du plan α.

Toutes les frontales d'un plan sont parallèles entre elles, leurs projections verticales sont donc aussi parallèles entre elles et leurs projections horizontales sont parallèles à la ligne de terre.

88. Les horizontales et les frontales sont des droites que l'on considère fréquemment dans les plans.

THÉORÈME XI.

89. *Si un plan* EFG *(fig. 62), non parallèle à la ligne de terre, est perpendiculaire au plan bissecteur* ABCD *d'un des dièdres formés par un plan horizontal* α *et un plan de front* β*, les intersections* EF *et* FG *du plan* EFG *avec les plans* α *et* β *font avec une parallèle à la ligne de terre, d'un même côté du plan* EFG, *des angles égaux, en ne considérant sur ces intersections que les portions situées dans les portions de plan formant le dièdre donné. La réciproque est vraie.*

En effet, soient αABβ le dièdre donné, ABCD le plan bissecteur de ce dièdre, EFG un plan perpendiculaire au plan bissecteur et FH son intersection avec ce dernier plan. Les trièdres FEBH et FGBH sont égaux comme ayant une face commune BFH adjacente à deux dièdres égaux chacun à chacun, et par suite les angles EFB et GFB sont égaux.

Réciproquement, si les angles EFB et GFB sont égaux, les trièdres FEBH et FGBH seront égaux, car ils ont les dièdres GFBH et EFBH égaux; de plus les faces GFB et HFB, qui comprennent le dièdre GFBH, sont respectivement égales aux faces EFB et HFB qui comprennent le second dièdre EFBH. Donc les dièdres GFHB et EFHB sont égaux et comme ils sont supplémentaires, ils sont droits.

90. Corollaire I. — Si dans une épure (fig. 63), pour un plan donné *(a, b)*, la projection horizontale d'une horizontale et la projection verticale

d'une frontale font avec une parallèle à la ligne de terre, dans le même sens et de part et d'autre, des angles φ égaux et différents de zéro, le plan donné est perpendiculaire à tous les premiers plans bissecteurs en vertu du numéro 40. La réciproque est vraie (nº 112).

91. Corollaire II. — Si dans une épure (fig. 64 et 65), pour un plan donné *(a, b)*, la projection horizontale d'une horizontale et la projection verticale d'une frontale sont parallèles ou confondues, sans être parallèles à la ligne de terre, le plan donné est perpendiculaire au second plan bissecteur. La réciproque est vraie (nº 112).

THÉORÈME XII.

92. *Pour qu'un plan, parallèle à la ligne de terre, soit perpendiculaire au plan bissecteur d'un des dièdres formés par un plan horizontal* α *et un plan de front* β, *il faut et il suffit que la distance entre les projections verticales de deux génératrices parallèles à la ligne de terre, soit égale à la distance entre les projections horizontales de ces mêmes génératrices.*

Car (fig. 66), soient FG, HI et AB respectivement les projections, sur un plan de profil, des plans α, β et du plan, parallèle à la ligne de terre et perpendiculaire au plan bissecteur d'un des dièdres formés par les plans α et β. Soient A et B les projections de deux génératrices, parallèles à la ligne de terre et prises dans le plan qui se projette en AB. En menant par A et B les perpendiculaires AH et BI au plan horizontal α et les perpendiculaires AF et BG au plan de front β, les distances HI et FG seront égales aux distances sur chacun des plans de projection, entre les projections des génératrices passant par A et B. Mais comme le plan, qui se projette en AB, est perpendiculaire au plan bissecteur de l'un des angles formés par les plans α et β, il en résulte que l'angle CAB est égal à l'angle ABC, donc CA=CB, donc FG=HI.

Supposons maintenant réciproquement que FG=HI ou AC=BC, que F et G représentent les projections, sur un plan de profil, des projections verticales de deux parallèles à la ligne de terre, et que H et I représentent les projections, sur le plan de profil, des projections horizontales des mêmes parallèles à la ligne de terre. Ces parallèles seront les

intersections de leurs plans projetants et seront donc deux droites passant par les points A et B ou C et D. Or, que l'on prenne les parallèles à la ligne de terre passant par A et B, ou bien celles passant par C et D, le plan de ces parallèles sera perpendiculaire au plan bissecteur d'un des dièdres formés par les plans de projection, puisque les angles CAB et ABC, CDB et DCB sont égaux.

93. **Corollaire I.** — Si un plan α, parallèle à la ligne de terre, est perpendiculaire aux premiers plans bissecteurs et si l'on considère, dans le plan α, deux génératrices a et b parallèles à la ligne de terre (fig. 67, 68 et 69), la distance entre les projections verticales de ces génératrices sera égale à la distance entre les projections horizontales ; de plus en vertu du numéro 40, les deux projections de l'une des génératrices ne seront jamais simultanément comprises entre les deux projections de l'autre, ou bien les deux projections de chacune d'elles seront confondues. La réciproque est vraie.

94. **Corollaire II.** — Si un plan α, parallèle à la ligne de terre, est perpendiculaire au second plan bissecteur et si l'on considère, dans le plan α, deux génératrices a et b parallèles à la ligne de terre, la distance entre les projections verticales de ces génératrices sera égale à la distance entre les projections horizontales; de plus en vertu du numéro 40, les deux projections d'une des génératrices seront simultanément comprises entre les deux projections de l'autre, ou bien chacune des projections de l'une des génératrices sera confondue avec la projection de nom contraire de l'autre génératrice (fig. 70, 71 et 72). La réciproque est vraie.

EXERCICE IV. — **95.** Dire dans quelle position par rapport aux plans de projection, se trouve chacun des plans représentés dans les figures 57 à 61, 63 à 65 et 67 à 72.

Exercice général. — **96.** *Chaque fois que, par la suite, on aura à considérer un plan dans une question quelconque, on s'exercera à traiter la question, quelle que soit la manière dont le plan est donné ou représenté.*

APPLICATION IX.

97. *Chercher le point d'intersection d'une droite* d, *non située dans un plan de profil, et d'un plan* α *perpendiculaire à un plan de projection* (fig. 73).

Si le plan α est vertical par exemple, le point d'intersection P doit se projeter horizontalement sur α^h et sur la projection horizontale d^h de la droite d, donc en P^h; on en conclut immédiatement la projection verticale P^v.

Remarque I. Si la droite était perpendiculaire à un plan de projection, sans être parallèle au plan vertical ou debout α, on aurait immédiatement son point d'intersection avec le plan.

Remarque II. — Nous verrons plus loin (n°s 105, 134 et 266), comment on devrait s'y prendre, quand la droite d est située dans un plan de profil, sans être perpendiculaire à un plan de projection. L'application IX rentre du reste dans le problème plus général consistant à déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan (n° 133).

EXERCICE V. — 98. *Étant données deux droites* AB *et* CD (fig 74) *situées dans un même plan de profil, on demande d'en représenter le point de rencontre ou de voir si elles sont parallèles* (n°s 71, 72, 126, 264). Projetons les deux droites obliquement (n° 3) sur un plan quelconque, par exemple sur le plan horizontal α. A cet effet, menons par les points A, B, C, D, des droites parallèles entre elles (n° 73) et cherchons-en les intersections A', B', C', D' avec α (n° 97). Si les projections obliques A'B' et C'D' sont parallèles, c'est que les droites données AB et CD le sont aussi; si les projections se coupent en un point M', ce point M' est la projection oblique du point de rencontre (AB, CD) et pour l'obtenir, il suffira de mener par M' une projetante et d'en prendre l'intersection M avec le plan de profil.

On pourrait avantageusement faire passer le plan α par un point connu d'une des droites de profil, ce point étant lui-même sa projection oblique.

On pourrait aussi employer les projections polaires (n° 5).

PROBLÈME VI.

99. *Étant donnés un plan et une projection d'une génératrice de ce plan, on demande de déterminer l'autre projection.*

Il suffira de déterminer sur la génératrice, deux points du plan, en prenant s'il y a lieu, les points où la génératrice s'appuie sur deux lignes connues et situées dans le plan.

1er Exemple. — Supposons (fig. 75) le plan donné par deux directrices a et b qui se coupent (n° 71).

Soit g^h la projection horizontale d'une génératrice g; g s'appuie sur a en un point dont la projection horizontale est à la rencontre de g^h et de a^h et dont la projection verticale se trouve sur a^v et sur une perpendiculaire à la ligne de terre passant par la projection horizontale du point. On détermine de même les projections du point d'appui de g sur la directrice b et la projection verticale de g passe par les projections verticales de ses deux points d'appui sur a et b.

Soit encore g'^v la projection verticale d'une seconde génératrice; on en déduira, par un raisonnement analogue au précédent, la projection horizontale g'^h.

Remarquons que g et g', étant situées dans un même plan, doivent se couper ou être parallèles. Dans le premier cas, le point de rencontre des projections verticales devra se trouver, avec le point de rencontre des projections horizontales, sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Il se présente ainsi fréquemment, dans les épures, des occasions de vérifier si l'on a dessiné avec exactitude, et l'on ne devra jamais négliger de voir si les vérifications qui doivent se produire se réalisent effectivement.

Si g''^v est la projection verticale d'une troisième génératrice, on en conclura encore facilement la projection horizontale g''^h. Mais on remarquera que g''^v étant pris parallèlement à g'^v, g'' doit être parallèle à g' et par suite, comme vérification, g''^h doit être parallèle à g'^h. Une autre vérification résultera de la rencontre de g'' avec g.

2me Exemple. — Supposons un plan (fig. 76) donné par deux parallèles a et b et proposons-nous de chercher une horizontale g du plan.

La projection verticale g^v de cette horizontale doit être parallèle à la

ligne de terre et l'on en déduit, comme précédemment, la projection horizontale g^h.

On déterminerait, d'une manière analogue, une droite de front g' du plan donné.

Les deux droites g et g' situées dans un même plan, se rencontrent en un point A qui, dans la figure 76, appartient au second plan bissecteur.

3me Exemple. — Supposons le plan (fig. 77) donné par une droite a et un point A et cherchons une horizontale du plan.

Si l'horizontale g doit passer par le point A, sa projection verticale passera par A^v et sera parallèle à la ligne de terre; on en déduira la projection horizontale du point d'appui de la génératrice sur la droite a et, par suite, la projection horizontale de cette génératrice.

Mais si l'horizontale ne passe pas par A, la projection verticale g'^v ne passera pas par A^v et l'on ne pourra, au moyen des données du plan, déterminer qu'un point de la projection horizontale de la génératrice, en cherchant le point où celle-ci s'appuie sur la droite a. Il sera donc nécessaire (n° 83) de prendre une seconde directrice du plan, par exemple, une droite de front menée par A, ou une droite menée par A parallèlement à a, ou une droite quelconque passant par A et s'appuyant sur a.

L'horizontale demandée s'appuiera sur cette seconde directrice b, en un point dont on trouvera facilement la projection horizontale, et en joignant les projections horizontales des points d'appui de la génératrice sur a et b, on aura la projection horizontale g'^h de cette génératrice.

On aurait aussi pu construire d'abord l'horizontale g menée par A, et l'on aurait alors la projection horizontale de g', en se rappelant (n° 86) que toutes les horizontales d'un plan sont parallèles.

4me Exemple. — On lira facilement les épures 78 à 81. Dans les deux premières, nous avons déterminé la seconde projection d'une génératrice g d'un plan (a, b), connaissant une des projections de g.

Dans la figure 80, nous avons réprésenté une horizontale du plan (a, b); dans la figure 81, nous avons représenté une frontale du plan (a, b).

100. Remarque. — *La règle générale donnée pour trouver la solution du problème précédent et toutes les règles, que nous donnons dans ce cours, ne doivent être employées que quand la solution du problème posé ne*

s'obtient pas plus simplement, à l'inspection des données de la question. Cette remarque est fort importante.

5me *Exemple.* — Supposons (fig. 82) que l'on demande une droite *g* d'un plan α, vertical ou debout : une des projections de *g* serait immédiatement connue et l'autre serait quelconque.

6me *Exemple.* — Si l'on donnait (fig. 83) sur un plan de projection, sur le plan V, par exemple, la projection d'une génératrice d'un plan α, perpendiculaire à l'autre plan de projection, on aurait immédiatement la seconde projection de cette génératrice.

7me *Exemple.* — La figure 84 représente une droite *g* perpendiculaire au plan horizontal et prise dans le plan α, perpendiculaire au même plan de projection.

101. Le problème précédent permet de substituer ou d'ajouter aux données géométriques qui déterminent un plan, les directrices qui conviennent à la question qu'on doit traiter (n° 83).

Ainsi, il peut arriver que les points de rencontre des directrices d'un plan, avec une génératrice demandée dans ce plan, ne se trouvent pas dans les limites de l'épure. Il faudra alors substituer à ces directrices, d'autres droites prises parmi les génératrices du plan.

Du reste, du moment qu'un plan est déterminé, toutes les droites de ce plan sont connues et c'est au dessinateur à prendre celles de ces droites qui conviennent le mieux à la question qu'il traite.

APPLICATION X.

102. *Étant données deux droites* a *et* b (fig. 85) *dont les projections de même nom ne se rencontrent pas dans les limites de l'épure, on demande de reconnaître si ces droites se coupent* (n° 71).

Si les deux droites *a* et *b* se coupent, elles déterminent un plan. Si donc nous déterminons dans ce plan deux génératrices *c* et *d*, ces génératrices doivent se couper ou être parallèles. Dans l'épure, nous avons pris arbitrairement les projections c^h et d^h, mais de manière que ces projections se coupent et rencontrent dans les limites de l'épure les projections de même nom des directrices *a* et *b*. L'épure montre que *c* et *d* se coupent et qu'il en est de même, par conséquent, de *a* et *b*.

PROBLÈME VII.

103. *Étant donnés un plan et une projection d'un point de ce plan, on demande l'autre projection.*

Si le plan α (fig. 86) est perpendiculaire à un plan de projection, par exemple au plan vertical, et si l'on donne la projection horizontale d'un point A du plan α, on aura immédiatement la projection verticale; si c'est la projection verticale A^v du point A, que l'on donne et qui doit nécessairement se trouver sur α^v, la projection horizontale A^h se trouvera, ou l'on voudra, sur la perpendiculaire menée par A^v à la ligne de terre.

Si l'on donne l'une des projections d'un point A du second plan bissecteur, on sait immédiatement que la seconde projection du point A doit être confondue avec la projection donnée (n° 46).

En général, si l'on n'a pas une solution immédiate du problème (n° 100) on imaginera dans le plan, une génératrice passant par le point; on pourra tracer une des projections de cette génératrice, par la projection donnée du point, et l'on en déduira l'autre projection, comme il a été dit au numéro 99. La seconde projection du point demandé appartiendra à la projection de même nom de la génératrice considérée et à une ligne de rappel, menée par la projection connue du point.

Ainsi, supposons (fig. 87) un plan donné par deux directrices parallèles a et b et soit A^h la projection horizontale d'un point du plan. En menant par A^h, une droite g^h quelconque, on pourra la considérer comme la projection horizontale d'une génératrice g, dont la projection verticale est g^v; la projection verticale du point A sera donc A^v.

Dans le cas que nous considérons, ou aurait pu employer une génératice g' parallèle au plan vertical, car la projection horizontale g'^h d'une pareille génératrice pourrait se tracer tout de suite, par A^h, parallèlement à la ligne de terre et la projection verticale g'^v s'en déduirait comme précédemment.

Dans la figure 88, on a résolu le problème pour un plan donné

par deux droites *a* et *b* qui se coupent, en prenant comme génératrice *g*, une droite s'appuyant sur *a* et parallèle à *b*.

EXERCICE VI. — **104.** *Prendre un point sur une droite située dans un plan de profil* (n°s 55 et 260).

Si la droite donnée est déterminée par deux points A et B, menons par ces points, deux droites déterminant un plan et prenons dans ce plan, une génératrice qui ne soit pas perpendiculaire à la ligne de terre. Il suffira de prendre sur cette génératrice, le point situé dans le plan de profil donné, pour avoir un point répondant à la question.

Dans la figure 89, nous avons donné la projection verticale I^v d'un point de la droite de profil AB et nous avons considéré le point I de la droite AB, comme un point d'un plan mené par AB et déterminé, par exemple, par deux droites *d* et *d'* parallèles à la ligne de terre. Nous avons déterminé le point I au moyen de la génératrice *g* (n° 99).

On pourrait aussi projeter polairement ou obliquement la droite de profil sur un plan horizontal ou de front et prendre l'intersection du plan de profil avec une projetante menée par un point de la projection oblique (n° 98).

EXERCICE VII. — **105.** *Déterminer le point d'intersection d'une droite située dans un plan de profil, et d'un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection* (n°s 97, 134 et 266).

On connaît, immédiatement, une des projections du point demandé et l'on déterminera l'autre projection, au moyen d'une génératrice prise dans un plan mené par la droite donnée (n° 104).

Dans la figure 90, nous avons cherché les points d'intersection T et T', de la droite de profil AB, avec le plan horizontal α et le plan de front β, en menant, par AB, un plan déterminé par les droites parallèles *d* et *d'* et en considérant successivement, dans ce plan, les génératrices *g* et *g'*.

EXERCICE VIII. — **106.** *Prendre un point dans un plan.*

Il suffira de prendre un point sur une génératrice du plan.

Les figures 78 à 81 montrent comment on a résolu la question

pour un plan (a, b), en prenant un point A sur une génératrice quelconque (fig. 78 et 79), sur une horizontale (fig. 80) ou sur une génératrice de front (fig. 81).

EXERCICE IX. — **107**. Vérifier si une droite est dans un plan.

EXERCICE X. — **108**. Vérifier si un point est dans un plan.

EXERCICE XI. — **109**. Vérifier si une droite est parallèle à un plan.

THÉORÈME XIII.

110. *Toute droite, perpendiculaire à un plan* α *qui n'est ni horizontal ni de front, a une projection horizontale perpendiculaire à la projection horizontale d'une horizontale du plan, et une projection verticale perpendiculaire à la projection verticale d'une frontale du plan. La réciproque est vraie si le plan* α *n'est pas parallèle à la ligne de terre.*

Car, si une droite est perpendiculaire à un plan, elle est perpendiculaire à une horizontale et à une frontale de ce plan : sa projection horizontale sera donc perpendiculaire à la projection horizontale de l'horizontale (n° 76) et par conséquent, à la projection horizontale d'une horizontale quelconque du plan; de même, sa projection verticale sera perpendiculaire à la projection verticale d'une frontale quelconque du plan (n°s 86 et 87).

Réciproquement, si la projection horizontale d'une droite d est perpendiculaire à la projection horizontale d'une horizontale d'un plan α, le plan qui projette horizontalement la droite d, sera perpendiculaire aux horizontales du plan α et par conséquent, il sera perpendiculaire au plan α. Si la projection verticale de la droite d est, en outre, perpendiculaire à la projection verticale d'une droite de front du plan α, on verra de même que le plan projetant verticalement la droite d, est perpendiculaire au plan α. Or, les deux plans projetants de la droite d sont distincts, sans être parallèles, et comme ils sont tous deux perpendiculaires au plan α, leur intersection, c'est-à-dire la droite d, sera perpendiculaire à α.

Remarque — **111.** Les projections, d'une perpendiculaire à un plan, seront connues en direction, dès qu'on connaîtra une horizontale et une frontale du plan.

EXERCICE XII. — **112.** Démontrer, en se basant sur le théorème précédent et sur les applications des numéros 74 et 75, les corollaires donnés aux numéros 90 et 91.

PROBLÈME VIII.

113. *Mener par un point* A, *un plan parallèle à deux droites* a *et* b.

Si l'une des droites *a* était perpendiculaire à un plan de projection, par exemple au plan horizontal H, le plan demandé serait perpendiculaire à ce plan de projection et sa projection, sur ce plan, serait une parallèle menée par A^h à la projection horizontale de l'autre droite *b*.

En général, si l'on n'aperçoit pas une solution immédiate (n° 100), comme dans l'exemple précédent, il faudra mener par le point A, une parallèle *d* à l'une des droites *a*, puis, mener par un point quelconque de *d*, une parallèle *d'* à la seconde droite donnée *b*.

PROBLÈME IX.

114. *Mener par une droite* a, *un plan parallèle à une droite* b.

Si la droite *b* était perpendiculaire à un plan de projection, le plan demandé serait perpendiculaire à ce plan de projection et aurait sa projection sur ce plan, confondue avec la projection de même nom de la droite *a*.

Si la droite *a* était perpendiculaire à un plan de projection, le plan demandé serait encore perpendiculaire à ce plan de projection et sa projection sur ce plan, serait une parallèle menée par la projection de la droite *a* à la projection de même nom de la droite *b*.

En général, si l'on n'aperçoit par une solution immédiate comme dans les deux exemples précédents (n° 100), il faudra, par un point

quelconque pris sur la droite *a*, mener une parallèle à la seconde droite *b* : cette parallèle et *a* détermineront le plan demandé.

PROBLÈME X.

115. *Mener, par un point* A, *un plan parallèle à un plan donné* α.

Si l'on veut mener, par un point A (fig. 91), un plan parallèle à un plan α perpendiculaire à un plan de projection, par exemple au plan horizontal, on pourra représenter immédiatement le plan demandé. En effet, celui-ci sera perpendiculaire au plan horizontal, sa projection horizontale devra passer par A^h et elle devra, du reste, être parallèle à α^h.

En général, si l'on n'aperçoit pas une solution immédiate, comme dans l'exemple précédent, il faudra mener par le point A, une droite parallèle à une première droite choisie dans le plan α; ensuite, par un point quelconque de cette parallèle, on mènera une nouvelle parallèle à une seconde droite choisie dans le plan α : ces deux parallèles détermineront le plan demandé.

Supposons par exemple (fig. 92), un plan α donné par le point B et la droite *d*. Menons par A, une parallèle *1* à une droite *g* du plan α et, par un point C de *1*, menons une parallèle *2* à la droite *d*. Le plan *(1, 2)* sera parallèle au plan *(B, d)*.

Supposons encore (fig. 93) un plan α donné par deux droites *d* et *d'* qui se coupent (n° 91). Menons par A, une parallèle *1* à *d* et, par le point B de *1*, menons la droite *2* parallèle à *d'*. Le plan *(1, 2)* sera le plan demandé.

EXERCICE XIII. — 116. Mener par un point A (fig. 94), un plan perpendiculaire à deux plans tels, que pour chacun d'eux, la projection horizontale d'une horizontale et la projection verticale d'une droite de front sont parallèles.

La question revient évidemment (n° 91), si les deux plans donnés se coupent, à mener par le point donné, un plan parallèle au second plan bissecteur ; tel est le plan (*a*, *b*).

PROBLÈME XI.

117. *Mener par un point* M, *une perpendiculaire* p *à un plan non parallèle à la ligne de terre.*

1° Si le plan donné α est parallèle à un plan de projection, nous aurons immédiatement la solution du problème en appliquant le théorème du numéro 60.

2° Si le plan donné α e t perpendiculaire à un plan de projection, sans être horizontal ou de front, par exemple perpendiculaire au plan V (fig. 95), la perpendiculaire p sera une droite de front dont la projection verticale sera perpendiculaire à α^v et dont la projection horizontale sera parallèle à la ligne de terre (n°s 110 et 111).

Dans la figure 96, nous avons mené par M, une perpendiculaire au plan vertical α.

3° Si l'on connaît (fig. 97) une horizontale *1* et une droite de front *2* d'un plan non parallèle à la ligne de terre, on aura encore immédiatement (n° 111) les projections de la perpendiculaire menée par le point M au plan *(1, 2)*.

4° En général (n° 111), il faudra déterminer dans le plan donné, une horizontale et une droite de front, pour pouvoir construire les projections d'une perpendiculaire au plan.

Dans la figure 98, le plan est donné par deux droites *1* et *2* qui se coupent; dans la figure 99, le plan est donné par les droites parallèles *1* et *2* et, dans chacune de ces épures, nous avons déterminé l'horizontale g et la droite de front g' pour construire les projections de la perpendiculaire p.

Remarque. — Quand le plan donné est parallèle à la ligne de terre, sans être horizontal ou de front, la perpendiculaire à ce plan est située dans un plan de profil et doit être déterminée par deux points (n° 62). Nous verrons plus loin, comment on peut résoudre la question dans ce cas particulier (n° 262).

PROBLÈME XII.

118. *Mener, par un point* A, *un plan perpendiculaire à une droite* d *non située dans un plan de profil.*

Si la droite donnée était parallèle à un plan de projection, on aurait immédiatement la solution du problème.

En général, on pourra (n° 110) mener dans le plan demandé, par le point A, une horizontale *1*; ensuite, par un point quelconque B de *1*, on pourra mener une droite de front *2* du plan demandé. Les droites *1* et *2* détermineront le plan, mené par A, perpendiculairement à *d* (fig. 100).

On pourra aussi mener d'abord, par le point A, une droite de front du plan demandé; puis, mener une horizontale dans ce plan, par un point quelconque de la droite de front.

Remarque. — Nous verrons plus loin, comment on peut résoudre la question, quand la droite est placée d'une manière quelconque dans un plan de profil (n° 263).

PROBLÈME XIII.

119. *Mener par une droite* d, *un plan perpendiculaire à un plan* α.

1° Si le plan est parallèle à un plan de projection, le plan demandé sera immédiatement connu.

2° Si la droite est perpendiculaire à un plan de projection, par exemple au plan horizontal, le plan demandé devra être perpendiculaire au plan horizontal et au plan α, donc à une horizontale de ce dernier plan; on voit que la projection horizontale du plan demandé, passera par la projection horizontale de *d* et sera perpendiculaire à la projection horizontale d'une horizontale de α.

3° En général, il faudra, d'un point A de la droite *d*, abaisser une perpendiculaire sur le plan α (n° 117); cette perpendiculaire et la droite *d* détermineront le plan demandé, si elles sont distinctes, c'est-à-dire si *d* n'est pas perpendiculaire à α.

Dans le cas où la droite *d* serait perpendiculaire au plan, tout plan passant par *d* satisferait à la question et le problème serait indéterminé.

Remarque. — Si le plan α était parallèle à la ligne de terre, sans être parallèle à un plan de projection, la perpendiculaire menée par le point A au plan α, serait située dans un plan de profil et nous n'apprendrons que plus tard à la déterminer (n° 262).

Il peut se présenter des exemples où l'on évite cette difficulté. Ainsi supposons que le plan α soit le second plan bissecteur.

Prenons sur *d* (fig. 101) deux points A et B. Par A^v et B^h, menons deux parallèles à la ligne de terre, nous les considérerons respectivement comme la projection verticale d'une horizontale *1* et la projection horizontale d'une droite de front *2* d'un plan perpendiculaire au plan α. La projection horizontale de *1* passera par A^h, la projection verticale de *2* passera par B^v; ces projections devront d'ailleurs être parallèles (n° 91) et rencontrer 1^v et 2^h en deux points, situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (n° 71). On voit qu'on pourra prendre $A^vK = A^hI$, joindre KB^v et mener, par A^h, une parallèle 1^h à KB^v ou 2^v. Les droites *1* et *2* déterminent le plan demandé et doivent, comme vérification, se couper.

On peut simplifier l'épure en choisissant (fig. 102), sur la droite *d*, deux points, tels que la projection verticale de l'horizontale *2* et la projection horizontale de la droite de front *1* soient confondues.

On pourrait, de la même manière, mener par une droite *d*, un plan perpendiculaire aux premiers plans bissecteurs (n° 90).

PROBLÈME XIV.

120. *Déterminer l'intersection de deux surfaces.*

Il est évident que les surfaces données doivent se couper, pour qu'on puisse en trouver l'intersection. Cette observation qui paraît banale, est parfois perdue de vue par les commençants ; nous en avons vu se donner beaucoup de peine pour chercher, par exemple, l'intersection du second plan bissecteur avec un plan donné par deux droites qui se coupent et dont chacune a ses projections confondues. Cependant, en se rappelant la remarque du n° 100 et le 4° du n° 65, on voit bien vite que les deux plans donnés n'en font qu'un et qu'il n'y a pas lieu de chercher leur intersection.

Il ne sera pas toujours aussi facile de voir si deux surfaces se coupent, mais l'application de la règle que nous trouverons pour en déterminer l'intersection, ne pourra plus donner aucun résultat et montrera l'impossibilité du problème si les surfaces ne se coupent pas.

Un point, commun à deux surfaces σ et σ', appartient nécessairement à deux lignes passant par ce point et tracées respectivement

sur chacune des surfaces données. De sorte que si l'on coupe σ et σ' par une surface auxiliaire α, et si l'on parvient à trouver les lignes l et l', suivant lesquelles la surface α coupe respectivement les surfaces σ et σ', les points communs à l et à l', s'il y en a, appartiennent à l'intersection demandée. En coupant ainsi par une suite de surfaces auxiliaires α, α', α'', on obtiendra autant de points que l'on en voudra sur l'intersection de σ avec σ'.

Mais en opérant de cette manière, loin de résoudre la question, il semble qu'on la complique. En effet, pour chaque surface auxiliaire α, on doit déterminer deux intersections, celles des surfaces σ et σ' avec α, tandis que le problème posé ne demande qu'une intersection, celle des surfaces σ et σ'. Il est donc nécessaire de supposer que les surfaces auxiliaires α puissent être choisies de telle manière, que leurs intersections avec σ et σ', se trouvent plus facilement qu'on ne trouve le lieu des points communs à σ et σ'. Nous dirons alors qu'elles sont *convenablement choisies.*

Remarque. — On dit parfois que l'intersection de deux surfaces est la *trace* de l'une des surfaces sur l'autre.

PROBLÈME XV.

121. *Déterminer l'intersection de deux plans.*

D'après ce qui est dit au numéro précédent, les surfaces auxiliaires devront être planes, afin que leurs intersections avec les plans donnés soient simples ; elles devront d'ailleurs être choisies de manière que ces mêmes intersections puissent se trouver plus facilement que l'intersection demandée.

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante pour déterminer l'intersection de deux plans :

On coupera les deux plans donnés, α *et* β, *par un plan auxiliaire* π, *convenablement choisi ; on cherchera les intersections* i *et* i' *de* π *avec* α *et avec* β *et le point de rencontre* A, *de* i *avec* i', *sera un point de l'intersection des plans* α *et* β *donnés. Un second point* B *sera obtenu de la même manière, par un second plan auxiliaire* ρ *et les deux points* A *et* B *détermineront le lieu demandé.*

Les intersections des plans α et β avec un plan auxiliaire, au lieu de se couper, pourraient être confondues, ou bien distinctes, mais parallèles : les conclusions à tirer de ces cas fortuits sont trop simples pour qu'il soit nécessaire de les indiquer.

On comprend aisément, que le choix des plans auxiliaires sera déterminé par la manière dont les plans α et β sont donnés ; mais nous verrons qu'en général, les meilleurs plans auxiliaires sont les plans perpendiculaires à un plan de projection.

122. Examinons d'abord quelques cas où l'on peut, très facilement, déterminer l'intersection de deux plans, sans employer de plans auxiliaires (n° 100).

1° Supposons (fig. 103) le plan α debout et le plan β vertical : on a immédiatement les projections de l'intersection *i*.

2° Si les plans α et β sont tous deux perpendiculaires à un même plan de projection, par exemple (fig. 104) au plan vertical, l'intersection *i* sera perpendiculaire au plan vertical ; la projection verticale i^v sera donc le point de rencontre des projections verticales des plans α et β et l'on en conclura la projection horizontale i^h (n° 60).

3° Quand les plans α et β sont donnés par leurs traces (n° 120, Rem.) sur deux autres plans et que l'on a, dans les limites de l'épure, les points de rencontre A et B de ces traces, alors on a l'intersection *i* des plans, en joignant les points A et B.

Si les traces des plans α et β sur un autre plan, étaient parallèles, l'intersection, si elle existe, serait parallèle à ces traces.

Dans les figures 105 et 106, les plans (*1*, *2*) et (*3*, *4*) ont un premier point A commun, dans le plan de front des droites *1* et *3*, et un second point B commun, dans le plan horizontal des droites *2* et *4*.

Dans la figure 107, les plans (*1*, *2*) et (*3*, *4*) ont un premier point A commun, dans le plan vertical ρ des droites *1* et *3* et un second point B commun, dans le plan debout π des droites *2* et *4*.

Dans la figure 108, les plans (*1*, *2*) et (*3*, *4*) ont, sur un plan de front, des traces *1* et *3* parallèles ; ils ont, sur un plan horizontal, des traces *2* et *4* qui se coupent en A : leur intersecticn *i* est donc une droite, passant par A et parallèle aux droites *1* et *3*.

4° Quand un plan α est perpendiculaire à un plan de projection, on a immédiatement une des projections de son intersection *i* avec un autre plan β, et l'on déterminera la seconde projection de *i*, en considérant cette droite comme une génératrice du plan β, (n° 99).

Ainsi dans la figure 109, le plan α est perpendiculaire au plan horizontal et la projection horizontale i^h, de son intersection *i* avec le plan (*1*, *2*), est confondue avec α^h; la projection verticale i^v est déterminée, au moyen des projections verticales des points d'appui de *i* sur les directrices *1* et *2* du plan (*1*, *2*).

Dans la figure 110, le plan α est parallèle au plan horizontal et son intersection *i*, avec le plan (*1*, *2*), est, dans ce dernier plan, une horizontale parallèle à *1* et dont on connaît la projection verticale i^v.

Dans la figure 111, le plan α est perpendiculaire au plan vertical, l'autre plan est donné au moyen de deux droites *1* et *2* qui se coupent.

Dans la figure 112, le plan α est parallèle au plan vertical, l'autre plan est donné par une droite *1* et un point M. Nous avons cherché les points A et B où la droite *i* s'appuie sur la droite *1* et sur une autre directrice du plan (*1*, M), par exemple, une parallèle menée par M, à la droite *1*.

Dans la figure 113, le plan (*1*, *2*) est parallèle à la ligne de terre et le plan α est parallèle au plan vertical. L'intersection *i* est nécessairement parallèle à la ligne de terre et il suffit d'en chercher un point A, sur une génératrice *g* du plan (*1*, *2*).

5° Dans le cas où l'un des plans est le second plan bissecteur, on trouvera, facilement, son intersection avec un autre plan, en cherchant les points où deux droites de celui-ci percent le plan bissecteur (n° 68).

Si l'un des plans était perpendiculaire à un plan de projection, par exemple, au plan vertical, et que l'autre plan fût le second plan bissecteur, les deux projections de l'intersection seraient confondues sur la projection verticale du premier plan (n° 65).

123. Dans les exemples qui suivent, nous serons obligés d'employer des plans auxiliaires.

1° Supposons (fig. 114) que les plans (*1*, *2*) et (*3*, *4*) soient donnés par leurs traces *1* et *3* sur un plan horizontal et par leurs traces *2* et *4* sur un plan de front, ces deux dernières droites ne se rencontrant pas dans les limites de l'épure.

Le point de rencontre A des traces *1* et *3* est un premier point de l'intersection.

Comme les traces *2* et 4 ne se rencontrent pas dans les limites de l'épure, coupons les plans donnés par un plan auxiliaire, par exemple, par le plan de front π. Cherchons les intersections i' et i'', de π avec les plans (*1*, *2*) et (*3*, *4*), et prenons le point de rencontre B de ces intersections. En joignant les points A et B, on aura l'intersection i des plans donnés.

2° Des plans (*1*, *2*) et (*3*, *4*) tous deux parallèles à la ligne de terre (fig. 115), donnent une intersection i parallèle à cette ligne. Pour en déterminer un point A, employons, par exemple, un plan auxiliaire π perpendiculaire au plan vertical. Le point A sera le point de rencontre des intersections i' et i'' de π avec (*1*, *2*) et (*3*, *4*) et en menant, par les projections de A, des parallèles à la ligne de terre, on aura les projections de i.

3° Supposons (fig. 116) que les plans (*1*, *2*) et (*3*, *4*) soient tels que les directrices, *1*, *2*, *3* et *4*, se coupent en un même point A ; ce point A est un premier point de l'intersection i des deux plans. Le plan auxiliaire π, parallèle au plan vertical, coupe les plans donnés suivant les droites i' et i'' donnant un second point B de i.

Dans la figure 117, nous avons employé, pour un cas analogue au précédent, un plan auxiliaire π parallèle à la droite *1* du plan (*1*, *2*). Les intersections i' et i'', de π avec (*1*, *2*) et (*3*, *4*), donnent un point B de l'intersection i.

4° Dans la figure 118, le plan (*1*, *2*) est perpendiculaire au second plan bissecteur (n° 91). Un second plan est déterminé par la droite *3* et le point M. On remarquera que les droites *1*, *2* et *3* se rencontrent en un point A qui est donc un premier point commun aux plans donnés. Pour trouver un second point commun, employons un plan auxiliaire π que nous menons, pour plus de facilité, par le point M, attendu que le point M appartiendra, dès lors, au plan π et au

plan (3, M) et sera un point connu de leur intersection. Les intersections i' et i'', de π avec (*1*, *2*) et (*3*, M) donneront un second point B de i.

Dans la figure 119, le plan (*1*, *2*) a ses directrices parallèles à la ligne de terre et l'autre plan est donné, comme dans la figure 118, par le point M et la droite *3* parallèle à la ligne de terre. L'intersection i est donc une parallèle à la ligne de terre et pour la déterminer, nous avons encore pris un plan auxiliaire π passant par M.

5° Supposons (fig. 120) que l'un des plans soit donné par les droites a et b et que l'autre plan soit donné par les droites c et d. Coupons les deux plans par un plan auxiliaire π passant par une des directrices. Supposons par exemple, que π soit le plan projetant horizontalement la droite a. De cette manière nous avons sans aucune construction, l'intersection a du plan π avec (a, b) et en déterminant (n° 122, 4°) l'intersection i' de π avec (c, d), on aura en A, un point commun aux plans donnés.

On pourrait couper les plans (a, b) et (c, d), par un second plan auxiliaire passant par une autre directrice et l'on aurait un second point de l'intersection des plans donnés. Mais quand on trouve, dans les limites de l'épure, les points de percée des directrices avec le second plan bissecteur, ce plan bissecteur est un plan très avantageux (n° 122, 5°). Ainsi dans la figure 120, il donne, comme intersection avec les plans donnés, les droites i'' et i''' dont la rencontre, en B, donne un second point commun à ces plans. La droite AB est l'intersection i demandée.

6° Supposons (fig. 121) un plan donné par la droite a et le point M, et un second plan donné par le même point M et la droite b.

Nous remarquons que le point M est un point commun aux deux plans. Pour trouver un second point de l'intersection, nous emploierons, comme dans l'exemple précédent, un plan auxiliaire π passant par une des directrices, par exemple, projetant verticalement la droite a. Son intersection, avec le plan (M, a) sera la droite a ; son intersection i', avec le plan (M, b) sera déterminée (n° 122, 4°) par ses points d'appui sur deux droites b et g du plan (M, b). La rencontre de i' avec a, donnera un second point A commun aux deux plans

donnés. Il suffira de joindre A et M pour avoir l'intersection *i* des deux plans donnés.

7° Dans la figure 122, nous avons pris un premier plan déterminé par la droite *a* et le point M, et un second plan déterminé par la droite *b* et le point N.

On pourrait, pour déterminer un point de l'intersection des plans donnés, employer, comme dans les deux exemples précédents, un plan auxiliaire passant par une des droites *a* et *b*; mais un plan auxiliaire π mené par les deux points M et N, est meilleur, attendu que, comme on va le voir, il dispense d'employer dans l'un ou l'autre des plans donnés, d'autres directrices que celles qui sont données. En menant π perpendiculairement au plan vertical, par exemple, par les points M et N, ces points appartiennent respectivement aux intersections i' et i'' de π avec (M,*a*) et (N,*b*) et il suffit de déterminer pour chacune de ces intersections, un second point, comme il a été fait au 4° du numéro 122. Le point A commun à i' et i'' est aussi commun aux deux plans (M,*a*) et (N,*b*).

Comme second plan auxiliaire ρ, nous avons pris le plan projetant horizontalement les points M et N, il coupe les plans (M,*a*) et (N,*b*) suivant les droites i''' et i'''' dont le point de rencontre B appartient à *i*. Il suffira de joindre les points A et B pour obtenir l'intersection des plans donnés.

8° Supposons (fig. 123) que les plans (*1*, *2*) et (*3*, *4*) soient donnés par leurs traces *1* et *3* sur un plan horizontal α et par leurs traces *2* et *4* sur un plan de front β, de telle sorte que les droites, *1* et *3* d'une part, *2* et *4* d'autre part, se rencontrent très loin hors des limites de l'épure. On pourra couper les plans donnés par un premier plan auxiliaire (5, 6) parallèle à la ligne de terre, mais placé de manière que sa trace *5*, sur α, soit très éloignée de β^h et que sa trace *6*, sur β, soit très rapprochée de α^v. Les projections verticales des intersections i' et i'', de (*5*, *6*) avec (*1*, *2*) et (*3*, *4*), se couperont en un point A^v, appartenant à la projection verticale de l'intersection *i* demandée. Les projections horizontales des mêmes intersections ne se couperont pas, en général, dans les limites du dessin.

On pourra déterminer, au moyen d'un second plan auxiliaire,

tel que (5, 7), un second point B^v de i^v. Puis, on pourra chercher la projection horizontale de i, au moyen de deux plans auxiliaires dont les traces, sur α, sont très rapprochées de β^h et dont les traces sur β, sont très éloignées de α^v.

Nous voyons, dans la figure 123, un exemple de l'emploi de plans auxiliaires, non perpendiculaires à un plan de projection.

Remarques. — **124.** I. — Nous ne traiterons pas un plus grand nombre d'exemples; nous en avons vu assez, pour que les commençants n'éprouvent plus de difficultés dans les nombreux exercices qu'ils créeront eux-mêmes, d'après les indications des numéros 50, 70 et 96. Ils devront avoir soin d'examiner, si pour l'exemple qu'ils traitent, le problème n'admet pas une solution immédiate (n° 100) ou si l'on ne connaît pas tout au moins la direction ou un point de l'intersection, et dans la négative, s'attacher à choisir les meilleurs plans auxiliaires. Ils remplaceront au besoin, les figures qui déterminent les plans, par d'autres figures, comme il a été dit aux numéros 83 et 101. Enfin, ils pourront s'aider éventuellement avec beaucoup d'avantage d'un tableau dans lequel ils inscriront les noms des figures qui déterminent les plans donnés et les plans auxiliaires, ainsi que les noms des intersections de ces derniers plans avec les premiers et des points de rencontre de ces intersections.

125. — II. Nous n'avons jamais employé les plans de profil comme plans auxiliaires, mais qu'on se garde d'en conclure qu'ils ne peuvent pas convenir; seulement, on ne saurait marquer immédiatement le point de rencontre des intersections d'un plan de profil avec deux plans donnés, et ce n'est que plus loin que nous apprendrons à lever aisément cette difficulté (nos 98, 126, 264 et 265).

EXERCICE XIV. — **126.** *Comment peut-on voir, graphiquement, si deux droites* d *et* d', *situées dans un plan de profil, se coupent ou sont parallèles* (nos 71, 72, 98 et 264).

On mènera un plan par chacune des droites; si les deux plans donnent une intersection qui perce le plan de profil, ce point de rencontre sera un point commun à d et d', lesquelles par conséquent,

se coupent. Mais si les deux plans sont parallèles, ou s'ils se coupent suivant une droite située dans un plan de profil, il est certain que *d* et *d'* sont parallèles.

EXERCICE XV — 127. *Mener par un point* M, *une parallèle à une droite* AB *située dans un plan de profil* (nos 73 et 261).

Si le point M n'est pas situé dans le plan de profil, il suffira de déterminer l'intersection du plan (A, B, M) avec le plan de profil passant par M.

Si le point M est situé dans le plan de profil passant par AB, il suffira de mener par M, une parallèle à l'intersection d'un plan mené par AB, et d'un autre plan de profil, parallèle à celui passant par AB.

APPLICATION XI.

128. *Mener par un point* M, *une droite s'appuyant sur deux droites données* d *et* d'.

Le problème revient à chercher (n° 123, 6°) l'intersection du plan (M, *d*) et du plan (M, *d'*). (Voir aussi le n° 136).

APPLICATION XII.

129. *Déterminer une droite s'appuyant sur deux droites* d *et* d' *données, et qui soit parallèle à une droite* d''.

Le problème revient à déterminer l'intersection de deux plans menés par *d* et *d'* parallèlement à *d''* (nos 114 et 121 à 123), et comme on sait d'avance que l'intersection a une direction connue, on pourra se borner à en chercher un point.

Après avoir mené par *d*, un plan parallèle à *d''*, il ne sera pas nécessaire de construire le plan passant par *d'* et parallèle à *d''*, si, pour déterminer un point de l'intersection de ces deux plans, on peut employer un plan auxiliaire passant par *d'*. Ce plan auxiliaire donnerait en effet, sur *d'*, un point de l'intersection et en menant, par ce point, une parallèle à *d''*, le problème serait résolu.

Si,. pour déterminer l'intersection des plans, menés par *d* et *d'*, parallèlement à *d''*, on a employé deux plans auxiliaires et qu'aucun de ceux-ci n'ait donné dans les limites de l'épure, un point de l'intersection cherchée, il sera bon d'examiner les positions approximatives des projections de l'intersection. Si l'on constate visiblement, que l'intersection se projette en dehors des limites de l'épure, il sera inutile d'employer de nouveaux plans auxiliaires (voir aussi le n° 136).

EXERCICE XVI — 130. Etant donnée la projection horizontale d'une perpendiculaire élevée sur une droite *d*, par un point M de *d*, trouver la projection verticale de cette perpendiculaire.

La perpendiculaire demandée est l'intersection du plan qui la projette horizontalement, et du plan mené par M, perpendiculairement à *d* (n°s 118 et 121 à 123).

EXERCICE XVII — 131. Déterminer le lieu des points à égale distance de trois points donnés A, B, C.

Le lieu est l'intersection des plans menés par les points milieux de deux des côtés du triangle ABC, perpendiculairement à ces côtés (n°s 118 et 121 à 123).

On remarquera qu'une droite et sa projection sur un plan sont divisées en parties proportionnelles par les projetantes de divers points pris sur la droite. Ainsi le point milieu d'une distance AB se projette au point milieu de la projection de AB.

PROBLÈME XVI.

131. *Abaisser d'un point* A *une perpendiculaire sur une droite* d.

Si la droite *d* était parallèle à un plan de projection, on aurait immédiatement la solution du problème (n° 77).

En général, si le problème n'a pas de solution immédiate, on mènera, par le point M, un plan perpendiculaire à *d* (n° 118) et l'on en cherchera l'intersection avec le plan (M,*d*); le point de rencontre de cette intersection avec la droite *d*, sera le pied de la perpendiculaire demandée.

On voit qu'il sera avantageux d'employer un plan auxiliaire passant par *d* et qui déterminera directement le pied de la perpendiculaire, si ce point est dans les limites de l'épure.

Nous verrons plus loin, un examen plus complet de la question (n° 268).

PROBLÈME XVII.

132. *Déterminer le point d'intersection* A *d'une ligne* a *et d'une surface* α.

Le point A appartenant à la surface, se trouve sur une ligne de la surface et sur α; donc, si l'on mène par *a* une surface auxiliaire π, que l'on cherche l'intersection *i* de π avec α, le point de rencontre (*i*, *a*) sera le point demandé.

On dit parfois que l'intersection d'une ligne et d'une surface, est la *trace* de la ligne sur la surface.

PROBLÈME XVIII.

133. *Déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan.*

Ce que nous avons dit au problème précédent, conduit à la règle suivante pour déterminer le point d'intersection d'une droite *d* et d'un plan α : *on mène par la droite donnée un plan auxiliaire, on cherche l'intersection de ce plan auxiliaire avec le plan donné, et le point de rencontre de l'intersection avec la droite donnée est le point demandé.* On devra s'attacher dans chaque exemple, à prendre un plan auxiliaire dont l'intersection avec le plan donné, se détermine facilement (nos 121 à 123).

1° Supposons (fig. 124) une droite *d* verticale ou debout, par exemple debout, et un plan α, déterminé par un point M et une droite AB de profil.

Dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'appliquer la règle donnée, car on connaît la projection horizontale P^h du point de rencontre

demandé et l'on cherchera la projection P^r (n° 103), en considérant dans le plan (M,A,B), une génératrice passant par le point P. Nous avons choisi une génératrice *g* passant par A; la projection horizontale en est connue et la projection verticale est déterminée par A^r et par la projection verticale du point d'appui de *g* sur une droite MB du plan (M, A, B).

2° Si le plan donné est perpendiculaire à un plan de projection, nous aurons immédiatement la solution du problème (n° 97).

3° Soient (fig. 125) une droite *d* quelconque et un plan donné par deux droites *a* et *b*. Menons le plan auxiliaire π projetant la droite *d* verticalement; son intersection *i* avec le plan (*a*, *b*), rencontre la droite *d* au point demandé P.

Dans la figure 126, le plan est donné par une horizontale *1* et une droite de front *2*; la droite *d* est quelconque.

Dans la figure 127, le plan est donné par les droites *1* et *2*; nous avons mené par *d*, un plan auxiliaire *(d, 3)* en ayant soin de prendre la droite *3* dans le plan de front de la droite *1*. Le point A de rencontre, de *3* et de *1*, est un premier point de l'intersection des plans (*d*, *3*) et (*1*, *2*); nous en avons trouvé un second B au moyen du plan horizontal de la droite *2*, et par conséquent, AB est l'intersection du plan (*1*, 2) avec le plan auxiliaire (*d*, *3*). Le point P de rencontre *d* avec AB est le point demandé.

On voit sans peine que les figures 125 et 126 sont plus simples que la figure 127 et que le plan π y a été mieux choisi.

4° Dans la figure 128, le plan (*1*, *2*) est perpendiculaire au second plan bissecteur (n°s 91 et 112). Nous avons mené, par la droite *d* le plan auxiliaire π perpendiculaire au plan vertical; son intersection *i* avec le plan *(1, 2)* donne le point P demandé.

Dans la figure 129, le plan *(1, 2)* est encore perpendiculaire au second plan bissecteur; mais nous avons construit sur le plan de front de *1* et sur le plan horizontal de *2*, les traces *3* et *4* d'un plan auxiliaire, mené par *d*, perpendiculairement au même plan bissecteur *(*n° 119, Rem.*)*. Les plans *(1, 2)* et *(3, 4)*, tous deux perpendiculaires au plan bissecteur, se coupent suivant une droite *i*, nécessairement perpendiculaire à ce dernier plan et située dans le plan de profil qui passe par le point

de rencontre des directrices *1* et *3*, et par le point de rencontre des directrices *2* et *4*. Le point P s'en déduit immédiatement.

La construction de la figure 129 n'est pas plus longue que celle de la figure 128.

5° Supposons un plan α donné par les droites *1* et *2* (fig. 130) et une droite AB située dans un plan de profil. Nous avons mené par AB, un plan auxiliaire π déterminé par AB et un point M de α; de cette manière, M est déjà un point de l'intersection de π avec α. Nous avons déterminé un second point de l'intersection en coupant les plans α et π par le plan projetant verticalement *2*; l'intersection *2* de ce dernier plan avec le plan *(1, 2)* est connue et l'intersection *i*", avec le plan π, est déterminée en choisissant dans π la directrice MA et la parallèle menée par B à MA. Le point de rencontre N de *2* avec *i*", étant joint à M, on a l'intersection *i* de π avec α; la rencontre de *i* avec AB donne le point P demandé.

6° Dans la figure 131, le plan α est déterminé par la droite *1* parallèle à la ligne de terre et par le point M; la droite *d* est quelconque.

Le plan π, mené par *d* est perpendiculaire au plan vertical et son intersection *i* avec α s'obtient en joignant les points où la droite *i* s'appuie sur la droite *1* et sur une directrice *g* de ce dernier plan. A la rencontre de *i* et de *d*, on a le point P demandé.

7° Supposons (fig. 132) un plan α donné par le point M et l'horizontale *a*, et une droite *d* parallèle à la ligne de terre. Prenons un plan auxiliaire π projetant horizontalement la droite *d*; son intersection *i* avec le plan α, est déterminée par les points d'appui de *i* sur les droites *a* et *g* du plan α. Le point P demandé est à la rencontre de *i* et de *d*.

8° Dans la figure 133, le plan α est déterminé par le point M et la droite *a*, parallèle à la ligne de terre; la droite *d* est placée dans un plan de profil et déterminée par les points A et B. Nous avons mené, par la droite AB, le plan auxiliaire (A, B, M); nous avons un point M de son intersection *i* avec le plan α et pour obtenir un second point de *i*, coupons les plans α et (A, B, M), par le plan π projetant verticalement la droite *a*. L'intersection *i*" de π avec (A, B, M) est déterminée par les points d'appui de *i*" sur les droites MA et MB;

l'intersection de π avec α est la droite a et le point de rencontre de i' avec a, donne un second point commun à α et (M, A, B). L'intersection i s'obtiendra donc en joignant ce second point au point M, et elle rencontre AB au point demandé P.

Remarque. — **134**. Le problème, que nous venons de résoudre, donne les solutions, pour tous les cas possibles, des problèmes déjà vus et où l'on demande le point d'intersection d'une droite avec le second plan bissecteur (n° 69); le point d'intersection d'une droite avec un plan perpendiculaire à un plan de projection (n°s 97 et 105); l'une des projections d'un point d'un plan, connaissant l'autre projection (n° 103).

APPLICATION XIII.

135. *On demande le point de rencontre d'une droite, située dans un plan de profil, avec le second plan bissecteur* (n°s 68 et 266).

Soit (fig. 134) AB la droite donnée dans un plan de profil; menons, par A et B, deux droites parallèles d et d' déterminant un plan auxiliaire, dont l'intersection i avec le second plan bissecteur (n° 122, 5°) rencontre la droite AB au point P demandé.

Autre remarque relative au Problème XVIII. — **136**. Ce problème permet de donner, pour résoudre les applications traitées aux numéros 128 et 129, de nouvelles règles qui sont toutefois moins générales que celles que nous avons déjà données.

1° *Pour mener par un point* M *une droite s'appuyant sur deux droites données* d *et* d' (n° 128), il suffit de considérer le plan déterminé par M et par l'une des droites données, de chercher le point d'intersection de ce plan avec l'autre droite et de joindre ce point au point M;

2° *Pour mener une droite s'appuyant sur deux droites données* d *et* d' *et qui soit parallèle à une droite* d'' (n° 129), il suffit de mener par l'une des droites données un plan parallèle à d'' (n° 114), de chercher l'intersection de ce plan avec l'autre droite donnée et de mener par ce point une parallèle à d''.

Ces règles conduisent à des constructions très claires, mais elles ne peuvent être utiles que si l'on trouve, dans les limites de l'épure, les points d'intersection qui amènent les solutions cherchées.

APPLICATION XIV.

137. *Construire une droite s'appuyant sur trois droites données* d, d', d''.

1° Si la droite demandée doit passer par un point A fixé sur l'une des droites données, sur *d* par exemple, l'intersection des plans (A, *d'*) et (A, *d''*) sera la solution du problème (n° 128).

2° Mais si l'on ne fixe pas sur *d*, *d'* ou *d''*, un point par où doit passer la droite demandée, il est important de remarquer que l'on pourra trouver très simplement six solutions.

Imaginons en effet un plan vertical passant par *d*, en prenant les points d'intersection de ce plan avec *d'* et *d''*, on aura, dans la droite joignant ces deux points, une solution du problème.

Mais on pourra considérer de même le plan debout passant par *d*, ou bien le plan vertical ou debout passant par *d'*, ou bien le plan vertical ou debout passant par *d''*, et l'on voit que le problème est susceptible de six solutions presque immédiates.

APPLICATION XV.

138. *On demande l'intersection de trois plans* α β *et* γ (n° 28).

On cherchera l'intersection *i* de deux des plans donnés. Le point où la droite *i* perce le troisième plan, sera le point commun aux trois plans.

EXERCICE XVII. — 139. *Trouver, sur une droite quelconque* d, *un point également distant de deux points donnés* A *et* B.

Il suffira de mener par un point pris sur la droite AB, à égale distance de A et de B, un plan perpendiculaire à cette droite et d'en chercher l'intersection avec *d*.

EXERCICE XVIII. — 140. *On demande le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre.*

Il suffira de chercher le point commun à trois plans menés perpendiculairement à trois arêtes en leurs points milieux (n° 138). Il faudra nécessairement que les trois arêtes choisies ne soient pas situées dans un même plan.

Ainsi, prenons (fig. 142) un tétraèdre SABC, dont nous supposons la base ABC dans un plan horizontal (voir le n° 147 pour les notations).

Les plans perpendiculaires aux arêtes AB et AC, se coupent suivant une droite *d* perpendiculaire au plan horizontal et dont il faut chercher le point d'intersection avec un plan, perpendiculaire à une troisième arête, an point milieu de celle-ci (n° 118). Considérons par exemple, l'arête SA et son point milieu M. Nous avons déterminé le plan perpendiculaire à SA au moyen d'une horizontale *1* menée par M et d'une frontale *2* dont la projection horizontale contient la projection horizontale de *d*; de cette manière le point d'intersection de *d* avec le plan (*1*, *2*) appartient à *2* et est immédiatement connu en O (n° 133), centre de la sphère demandée.

Cette solution, en toute conforme à la règle générale indiquée au début de cet exercice, doit être préférée à la suivante, bien que celle-ci ait été indiquée comme classique (*).

Après avoir déterminé (fig. 143), comme dans la figure précédente, la droite *d*, perpendiculaire au plan horizontal, sur laquelle se trouve le centre O de la sphère, on trace la droite de front SX qui joint le point S à un point X de la circonférence circonscrite à la base ABC. Cette circonférence limite un petit cercle de la sphère demandée. Le plan α perpendiculaire à SX et mené à égale distance des points S et X, est rencontré par la droite *d* au centre O. Cette solution exige que la ligne parallèle à la ligne de terre, menée par S^h coupe la circonférence ABC.

Si l'une des faces du tétraèdre n'est pas dans un plan parallèle à un plan de projection, la solution générale ne présente aucune difficulté.

(*) Babinet. Eléments de Géométrie Descriptive.

Considérons, par exemple (fig. 144), le tétraèdre SABC. Aux points milieux des arêtes AB, AC et SA, construisons les plans *(1, 2)*, *(1', 2')* et *(1'', 2'')*, respectivement perpendiculaires à ces arêtes; nous avons, à cet effet, mené les horizontales *1*, *1'* et *1''* de ces plans et nous avons construit les droites de front, *2*, *2'* et *2''*, dans un même plan de front α, afin de trouver immédiatement, dans ce plan, à la rencontre de *2* et *2'*, un point X de l'intersection des plans *(1, 2)* et (*1'*, *2'*). Pour trouver un second point Y de l'intersection des plans (*1*, *2*) et (*1'*, *2'*), nous avons pris les intersections *1* et $1'_1$, de ces plans avec le plan auxiliaire horizontal mené par *1*.

Il nous reste à chercher le point d'intersection de XY avec le plan (*1''*, *2''*). Nous pourrions, à cet effet, mener par XY, un plan auxiliaire perpendiculaire à l'un des plans de projection, mais nous pouvons aussi prendre le plan (*1'*, *2'*) qui passe par XY, comme plan auxiliaire. Le point de rencontre de *2'* et *2''* est un premier point Z de l'intersection des plans (*1'*, *2'*) et (*1''*, *2''*); pour avoir un second point U de cette intersection, nous avons pris le point de rencontre des droites $1'_1$, et $1''_1$, suivant lesquelles le plan horizontal mené par *1*, coupe les plans (*1'*, *2'*) et (*1''*, *2''*). Le centre demandé est donc à la rencontre O de XY avec UZ.

Nous verrons bientôt (n° 269) qu'on pourrait ramener le cas de la figure 144 à celui que nous avons examiné dans les figures 142 et 143.

§ 4. CONVENTIONS RELATIVES AU TRACÉ DES LIGNES D'UNE ÉPURE.

Vu et caché. — **141.** Un point A est *vu pour un plan* α, quand la perpendiculaire indéfinie menée par le point A au plan α, ne perce au-dessus du point A, la surface d'aucun corps (n° 16).

Un point A est *caché pour un plan* α, quand la perpendiculaire indéfinie, menée par le point A au plan α, perce au-dessus du point A, la surface σ d'un corps. On dit souvent dans ce cas, que le point A est *caché par la surface* σ ou *par le point d'intersection situé au-dessus de* A.

Le lieu des points vus d'un corps, est la *partie vue* ou le dessus

du corps ; le lieu des points cachés, est la *partie cachée* du corps.

La ligne qui sépare sur la surface d'un corps la partie vue de la partie cachée, est le *contour apparent de la surface du corps.*

Remarque I. — **142.** Quand un point est vu ou caché pour un plan α, il est vu ou caché pour tous les plans parallèles au plan α.

Remarque II. — On doit remarquer que la signification donnée aux mots *vu* et *caché,* s'accorde avec la signification vulgaire de ces mots, *dans l'hypothèse de corps opaques*, puisque dans le langage vulgaire, un point A *est vu,* quand il n'y a sur aucun corps opaque, *au-dessus* du point A, d'autre point qui *cache* le point A.

Remarque III. — On peut répéter tout ce qui est dit au numéro précédent, pour chacun des plans de projection H et V et l'on se rappellera à cet égard ce que nous avons dit aux numéros 14 et 15 en ce qui concerne l'emploi des mots *au-dessus* et *au-dessous, en avant* et *en arrière.*

Conventions pour le tracé des lignes d'une épure. — **143.** *Les projections sur un plan, des arêtes et des autres lignes importantes que l'on veut considérer sur la surface d'un corps, sont dessinées en traits pleins ou ponctués, suivant que ces lignes sont vues ou cachées pour le plan de projection.*

Les autres lignes tracées dans une épure, sont appelées LIGNES AUXILIAIRES ; *elles sont dessinées en traits interrompus. Si une ligne auxiliaire a une certaine importance et qu'on veuille la distinguer des autres, on la dessinera en traits interrompus séparés par un, deux.... points.*

144. Considérons, sur la partie cachée d'un corps pour le plan α, un point A tel que sur la perpendiculaire indéfinie menée par le point A au plan α, il n'y ait sur la surface du corps, aucun point au-dessous du point A. Nous dirons que le lieu des points A est le *dessous* du corps pour le plan α.

Parfois, dans certaines applications de la Géométrie Descriptive à la coupe des pierres, à la charpente, etc., lorsque le dessous d'un corps présente une grande importance, les dessinateurs abandonnent

la première convention du numéro 143 pour adopter la suivante :

Les projections sur un plan, des arêtes et des autres lignes importantes que l'on veut considérer sur le dessous de la surface d'un corps, sont dessinées en traits pleins; les projections des arêtes et des autres lignes importantes que l'on veut considérer sur les autres parties de la surface du corps sont dessinées en traits ponctués.

PROBLÈME XIX.

145. *Déterminer par rapport à un plan α, la partie vue et la partie cachée d'une figure appartenant à la surface d'un corps.*

Il faudra en général, considérer le lieu des droites projetant, sur le plan α, les différents points de la figure, et en chercher l'intersection complète avec la surface du corps (n° 141).

On aura soin de ne chercher l'intersection, que lorsqu'un examen attentif de la question ne donne pas de solution plus simple (n° 100).

Soit un parallélépipède ABCDFGHI (fig. 136). Occupons-nous d'abord du dessin des projections verticales des arêtes (n° 143).

Nous remarquerons immédiatement, que les arêtes AB, BC, CH, HI, IF et FA sont vues pour le plan vertical, puisque les plans projetant verticalement ces arêtes, ne rencontrent pas la surface du corps, suivant d'autres lignes que ces arêtes.

Le plan, projetant verticalement l'arête AD, coupe les faces AG et GC, suivant les droites AK et KL dont tous les points sont en avant de AD; donc cette dernière droite est cachée pour le plan vertical.

Le plan, projetant verticalement l'arête DC, coupe la face BH suivant la droite LC dont tous les points sont en avant de DC; donc, cette dernière droite est cachée pour le plan vertical.

Le plan, projetant verticalement l'arête DI, coupe la face BH suivant la droite LM, parallèle à DI; il coupe aussi la face GI, suivant la droite MI et comme tous les points de LM et de MI sont en avant de DI, cette dernière droite est cachée pour le plan vertical.

On verrait de même que les droites BG, GF et GH sont vues pour le plan vertical.

Si nous voulons examiner le dessin des projections horizontales des arêtes (n° 143), nous verrons comme précédemment, que les arêtes AB, BG, GH, HI, ID et DA, ainsi que les arêtes AF, FG et FI sont vues pour le plan horizontal; les arêtes BC, CD et CH sont cachées pour le plan horizontal.

Mais remarquons que dans l'exemple que nous venons de traiter en appliquant la règle générale donnée en tête de ce numéro, on peut reconnaître *immédiatement* les arêtes vues et les arêtes cachées pour le plan vertical. Il suffit de constater au moyen de la projection horizontale de la figure représentée, que le point G est en avant de tous les points du parallélépipède et est, par conséquent, vu pour le plan vertical.

On reconnaîtrait tout aussi facilement, les arêtes vues et les arêtes cachées pour le plan horizontal et l'on voit que dans ce cas, l'emploi de la règle générale et les constructions que celle-ci nous a conduit à exécuter sont inutiles.

146. Remarque I. — La figure 137 suppose la lettre H placée au-dessus de V. Le parallélépipède de la figure 137 est le symétrique de celui de la figure 136 ce dont on se rendra facilement compte (n°s 16 et 38).

Remarque II. — Un point peut être vu par rapport à un plan α et être caché par rapport à un plan β, non parallèle à α (n° 142, Rem. I).

Ainsi (fig. 135), soit ABC la base d'un tétraèdre ayant le point S comme sommet. Le point S est vu par rapport au plan horizontal, puisqu'il est au-dessus du point d'intersection Q du plan ABC avec la verticale du point S. Mais le point S est caché par rapport au plan vertical, parce qu'il est en arrière du point d'intersection P, du plan ABC avec la droite debout menée par S.

On conclut facilement de ce qui précède, que les arêtes SA, SB et SC ont tous leurs points au-dessus et en arrière du plan ABC; ces arêtes sont donc vues pour le plan horizontal et cachées pour le plan vertical.

Représentation des corps. — 147. Dans cette Première Partie, toutes les fois que nous représenterons un corps, nous aurons soin d'appliquer dans le dessin les prescriptions du n° 143.

De plus, nous nous arrangerons toujours, s'il y a moyen, de manière que les projections horizontales et verticales des arêtes et des autres lignes importantes que l'on veut considérer sur la surface du corps, soient bien distinctes (n°s 42 et 43). Comme il sera facile alors de ne pas confondre les projections horizontales de ces lignes avec les projections verticales, il sera en général, inutile de charger les signes employés pour nommer les points ou les lignes, des exposants conventionnels qui permettent de distinguer les deux projections; l'épure y gagnera en clarté.

Nous avons agi de cette manière dans les épures 138 et suivantes, quand aucun inconvénient n'en résultait et nous n'avons, dans ces épures, affecté des exposants h et v, que le signe représentant un seul point de la figure considérée dans l'espace.

Remarque. — On dit souvent que la projection d'un corps sur un plan, dessinée conformément aux conventions du numéro 143, est une *image* ou une *vue* du corps pour un œil placé à l'infini au-dessus du plan de projection et pour lequel les rayons visuels seraient perpendiculaires au plan de projection.

EXERCICE XIX. — 148. Justifier les représentations des pyramides SABC dans les figures 138 à 144.

Figures géométrales des praticiens. — 149. Les édifices, les machines et autres constructions présentent généralement trois directions principales : l'une verticale, les deux autres horizontales et rectangulaires. La direction verticale est celle des hauteurs ; l'une des directions horizontales est celle des longueurs ; l'autre est celle des largeurs, des épaisseurs ou des profondeurs.

150. Tout plan parallèle à deux des trois directions principales est appelé plan *géométral* et trois plans, respectivement parallèles aux trois directions principales prises deux à deux forment un *système de plans géométraux*.

151. On appelle *plan horizontal* tout plan parallèle aux deux directions horizontales.

On appelle *plan longitudinal* tout plan parallèle à la direction des hauteurs et à celle des longueurs.

On appelle *plan latéral* tout plan parallèle à la direction des hauteurs et à celle des largeurs, épaisseurs ou profondeurs.

152. Considérons les projections d'une figure sur un système de plans géométraux.

On appelle *plan*, la projection sur un plan horizontal.

On appelle *élévation longitudinale*, la projection sur un plan longitudinal.

On appelle *élévation latérale* la projection sur un plan latéral.

153. On peut observer dans le tracé des projections, les conventions données au numéro 143, mais le plus souvent, on ne dessine sur chaque plan géométral, que les projections des lignes vues pour ce plan.

Pour dessiner les projections des parties cachées de l'objet à représenter, on enlève au moyen d'un plan parallèle au plan de projection considéré, la partie de l'objet située immédiatement au-dessus ou en avant des parties cachées et l'on dessine alors la projection des parties vues de la figure qui reste. Ce dessin nouveau porte le nom de *coupe* et pour chaque plan de projection, on établit autant de coupes qu'il est nécessaire pour dessiner les projections des différentes parties de l'objet et bien faire comprendre l'agencement de ces parties.

154. Les coupes se distinguent en *coupes horizontales*, *longitudinales* et *latérales* suivant que les projections qu'elles représentent sont faites sur un plan horizontal, longitudinal ou latéral.

155. Le plan, les élévations et les coupes sont désignés sous le nom de *figures géométrales*. Ces figures géométrales, vu leur étendue, doivent souvent être tracées sur des feuilles séparées sans pouvoir être mises en concordance (nos 34 et 40).

156. Lorsque les formes des corps représentés ou de certaines parties de ces corps ne ressortent pas d'une manière suffisamment claire des figures géométrales, on adjoint à ces dernières figures des *perspectives polaires*, *axonométriques* ou *cavalières* qui font l'objet d'autres parties de notre Cours (n° 27) et qui ont précisément pour but de créer des images rappelant les formes que l'on veut mettre en évidence.

§ 5. SECTIONS PLANES FAITES DANS LES POLYÈDRES (*).

Définitions. — 157. Si l'on cherche l'intersection d'un polyèdre et d'un plan, ce plan est appelé *plan sécant* et l'intersection est dite une *section plane* faite dans le polyèdre par le plan sécant.

Les *sommets* de la section plane sont les points d'intersection des arêtes du polyèdre avec le plan sécant.

Détermination d'une section plane. — 158. La détermination d'une section plane faite dans un polyèdre, présente une grande importance au point de vue pratique et, bien que cette détermination ne comporte que les opérations nécessaires pour chercher les intersections d'un plan successivement avec les plans des différentes faces du polyèdre, (n°s 121 à 125) ou successivement, avec les différentes arêtes du polyèdre (n°s 133 et 134), il est fort utile de faire valoir certaines considérations qui simplifient considérablement l'épure.

PROBLÈME XX.

Déterminer les projections d'une section plane faite dans un polyèdre.

Le plan sécant est vertical ou debout. — 159. Le problème est très simple à résoudre si le plan sécant est vertical ou debout, car on a immédiatement dans ce cas, les sommets de la section plane en prenant les points de rencontre des arêtes avec le plan sécant (n° 133, 2°);

(*) *Archives de mathématiques pures et appliquées*, Liége, 1907.

il ne reste plus qu'à joindre les sommets dans l'ordre géométrique nécessaire, ce qui ne présente aucune difficulté.

Supposons par exemple (fig. 145), un dodécaèdre rhomboïdal A et proposons-nous de déterminer la section faite dans ce solide par le plan debout α. On voit aisément que cette section sera le polygone dont les sommets sont les points B, C, D, E, F et G.

Dans la figure 146, nous avons représenté ce qui reste du dodécaèdre supposé plein et opaque quand on en supprime la partie située au-dessus du plan α.

On pourra représenter de même ce qui reste du dodécaèdre quand on en supprime la partie située au-dessous du plan α.

Le plan sécant n'est ni vertical ni debout. — **160.** Si le plan sécant n'est ni vertical ni debout, on peut ramener ce cas au précédent comme nous le verrons plus tard (nos 233 et 250), au moyen d'une rotation ou d'un changement de plan de projection et c'est ce que nous conseillons (n° 270).

161. Mais supposons que pour un motif quelconque, on ne puisse ou l'on ne veuille amener le plan sécant à être perpendiculaire à un plan de projection, alors nous distinguerons trois cas :

Le cas où le polyèdre est un prisme,

Le cas où le polyèdre est une pyramide,

Le cas où le polyèdre est un prisme, une pyramide ou un autre polyèdre quelconque.

Cas du Prisme. — **162.** Si le polyèdre est un prisme, on aura facilement les sommets de la section plane, sur les arêtes latérales du prisme (n° 133), en imaginant des plans auxiliaires verticaux ou debout et passant par les arêtes parallèles du prisme. Les intersections de ces plans auxiliaires avec le plan sécant sont toutes parallèles entre elles et quand on en aura déterminé une (n° 122), on aura systématiquement toutes les autres, après avoir déterminé pour chacune d'elles, le point d'appui sur une droite du plan sécant (n° 99); les points de rencontre de ces intersections avec les arêtes correspondantes du prisme sont les sommets de la section plane.

Les sommets sur les arêtes latérales étant connus, on en déduit immédiatement, s'il y a lieu, les sommets sur la base.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de déterminer la section plane faite par le plan (*1*, *2*) dans un prisme dont la base ABCD (fig. 147) est placée dans le plan horizontal α et dont les arêtes sont parallèles à la droite *d*.

Cherchons le point d'intersection du plan sécant (*1*, *2*) avec l'arête du point A, en employant le plan auxiliaire debout β. L'intersection du plan β avec le plan (*1*, *2*) est la droite *i* dont la rencontre M avec l'arête du point A est un sommet de la section plane. Pour trouver les sommets sur les autres arêtes du prisme, nous avons mené par ces arêtes des plans debout auxiliaires, leurs intersections avec le plan (*1*, *2*) sont parallèles à *i* et sont donc déterminées chacune par un seul point, par exemple, par le point d'appui sur *2*. On obtient ainsi les sommets N, P, Q et la section plane MNPQ.

Nous avons représenté le tronc de prisme compris entre le plan β et le plan (*1*, *2*).

On trouvera un autre exemple au numéro 190.

Cas de la pyramide. — 163. Si le polyèdre est une pyramide, on aura facilement les sommets de la section plane, sur les arêtes latérales de la pyramide, en imaginant des plans auxiliaires verticaux (ou debout) passant par les arêtes convergentes de la pyramide et qui déterminent un faisceau de plans, ayant pour axe commun une droite verticale (ou debout) menée par le sommet de la pyramide. Les intersections de ces plans auxiliaires avec le plan sécant, sont des droites convergentes formant un faisceau ayant pour centre l'intersection du plan sécant avec la droite verticale (au debout) menée par le sommet de la pyramide; dès que l'une d'elles aura été déterminée, on aura, s'il est dans les limites de l'épure, le centre du faisceau de ces droites et l'on obtiendra systématiquement toutes les autres, après avoir déterminé pour chacune d'elles le point d'appui sur une droite du plan sécant. Les sommets de la section plane s'en déduisent aisément.

Les sommets sur les arêtes latérales étant connus, on en déduit immédiatement, s'il y a lieu, les sommets sur la base.

Supposons par exemple (fig. 152) que l'on veuille déterminer la section plane faite par le plan (*1, 2*) dans la pyramide ayant pour sommet le point S et pour base le polygone ABCDF pris dans le plan BCD. Le plan vertical mené par l'arête SB donne, avec le plan sécant, l'intersection *i* qui rencontre l'arête SB en un sommet N de la section plane; du reste, le point de rencontre O, de *i* avec la verticale du point S, est le centre du faisceau de toutes les droites analogues à *i*.

Pour trouver sur les arêtes latérales de la pyramide, les autres sommets de la section plane, nous avons imaginé les différents plans verticaux contenant ces arêtes; leurs intersections avec le plan (*1*, *2*) passent toutes par O, et pour chacune d'elles, il ne faut donc déterminer qu'un seul point, par exemple le point d'appui sur *1*. On obtient ainsi successivement les sommets U, N, P, Q, V déterminant la section plane dans la surface latérale de la pyramide.

Si l'on considère la pyramide comme limitée entre le sommet S et la base, il faut supprimer dans le polygone UNPQV, la partie UMRV qui se trouve au-delà de la base par rapport au sommet et que l'on reconnaît immédiatement; la section plane est constituée dans ce cas, par le polygone MNPQR.

Cas d'un polyèdre quelconque. — **164.** Si le polyèdre donné est quelconque, on pourrait encore chercher les sommets de la section plane en déterminant successivement les points d'intersection des arêtes avec le plan sécant.

165. Mais il sera plus avantageux (n° 177) de chercher l'intersection du plan sécant avec le plan de chacune des faces du polyèdre et de prendre, sur chacune de ces intersections, les *parties utiles*, c'est-à-dire celles qui sont situées dans la face considérée, *chacune de ces parties utiles étant nécessairement un côté de la section plane.* Nous allons voir, que contrairement à l'opinion de certains auteurs prétendant que les tracés sont très longs, la section plane peut se

déterminer ainsi facilement et rapidement si l'on remarque, ce qui est bien naturel, que toutes les fois qu'on aura cherché (fig. 149) l'intersection *i* du plan sécant avec le plan d'une face ABCDE du polyèdre, les points de rencontre 1,2,3,4,5 de l'intersection *i* avec les différentes arêtes AB, BC,...., prolongées au besoin, sont chacun un point de l'intersection du plan sécant avec le plan d'une seconde face passant par l'arête à laquelle appartient le point considéré. On reconnaîtra facilement cette seconde face, si l'on a désigné chacune des faces du polyèdre par les noms de tous les sommets et que l'on ait fait le tableau des noms des faces.

Ainsi, le point 4 situé sur l'arête DE appartient à une seconde face dont le nom contient les lettres D et E; le point 5 situé sur l'arête AE appartient à une seconde face dont le nom contient les lettres A et E, etc.

C'est la connaissance et l'utilisation méthodique des points de rencontre 1,2,3.... et des autres circonstances spéciales pouvant se présenter, qui simplifient considérablement les opérations, et nous offrons à cet effet, une règle générale dont on pourra suivre le développement dans chacune des figures 150 et 151. Elle constituera une utile initiation à la règle générale que nous donnons plus loin (n° 182) pour la recherche de l'intersection de deux polyèdres.

Règle générale pour la recherche d'une section plane dans un polyèdre. —

166. 1° On construit un tableau présentant deux colonnes verticales que l'on divise, par des horizontales, en autant de groupes de deux rectangles qu'il y a de faces dans le polyèdre. Dans les rectangles de la première colonne, on inscrit respectivement les noms ABCD..., ABE..., EBC..., etc. des faces du polyèdre, chacun de ces noms étant formé par les lettres qui désignent les sommets. Dans chaque rectangle de la seconde colonne, on indique, à mesure qu'on les trouve dans la suite, les noms des points appartenant à l'intersection du plan sécant avec le plan de la face indiquée dans le rectangle correspondant de la première colonne, et aussi toutes les autres indications utiles relatives à cette intersection;

ABCD...	
ABE...	
EBC...	

en particulier, on indique en chiffres romains par exemple, l'ordre dans lequel on considère successivement les intersections et, au-dessous, s'il y a lieu, les noms des extrémités des parties utiles.

Ce tableau est utile pour retrouver facilement, quand on veut faire la recherche d'une intersection, tout ce que l'on connaît déjà pour cette droite; il permet aussi, sans même que l'on doive consulter l'épure, de nommer tous les sommets du ou des polygones formant la section plane, dans l'ordre de la succession géométrique de ces sommets, car une partie utile de la section ne peut être suivie que d'une nouvelle partie utile ayant avec la précédente une extrémité commune ; il permet enfin une vérification facile des opérations.

2° On examine attentivement si l'on ne connaît pas à priori des points appartenant aux intersections du plan sécant avec les plans de certaines faces du polyèdre, ou la direction, ou l'inexistence de certaines intersections. Ainsi, lorsque le plan sécant est parallèle à une arête du polyèdre, comme dans la figure 150, où il est supposé parallèle à DE, il est certain que le plan sécant coupe les plans des faces DEF et ABCDE dont les noms contiennent D et E, suivant des droites parallèles à l'arête DE. Ainsi encore, lorsque le plan sécant est parallèle au plan d'une face, on peut marquer d'un numéro d'ordre le rectangle correspondant qui ne recevra plus aucune autre indication ; mais en considérant successivement chaque arête de la face et prenant le compartiment dont le nom comprend les lettres qui désignent l'arête, on peut noter que l'intersection est parallèle à cette droite.

Tous ces résultats et toutes autres remarques utiles, qui peuvent être faites à priori ou à posteriori à propos des intersections, sont inscrites dans les compartiments correspondants.

3° On choisit dans le polyèdre une face XYZ... dont le plan paraît le plus avantageux au point de vue de la détermination de son intersection *i*, avec le plan sécant.

Ainsi, entre deux faces dont l'une est dans un plan vertical ou debout et l'autre pas, on choisira de préférence la première, car son plan est particulièrement bien placé pour en avoir l'intersection avec le plan sécant ; ainsi encore, entre deux faces, on choisira celle qui présente le plus grand nombre d'arêtes, parce qu'elle donnera

sur l'intersection de son plan avec le plan sécant le plus grand nombre de points à inscrire dans les rectangles *ad hoc* du tableau.

4° Le choix étant fait, on le marque de son numéro d'ordre, dans le rectangle correspondant ; puis, on détermine l'intersection i_1 ; on en trace les projections (*) ; on marque sur i_1, les points de rencontre 1, 2, 3,... avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de la face choisie XYZ... ; on inscrit chacun de ces points dans le rectangle non encore numéroté et correspondant à la face dont le nom contient les lettres désignant l'arête sur laquelle se trouve le point considéré ; on prend sur l'intersection les parties utiles, s'il y en a.

5° S'il n'existe sur l'intersection i_1, aucune partie utile, il faut choisir dans le polyèdre une nouvelle face comme au 3°, en s'aidant du tableau pour faire le choix paraissant le meilleur, puis recommencer les opérations indiquées au 4°.

6° Supposons que l'on arrive à une certaine face telle que l'intersection de son plan avec le plan sécant présente une partie utile. On inscrit les noms des extrémités de cette partie utile au-dessous du numéro d'ordre qui classe l'intersection dans la suite des opérations; chacune de ces extrémités appartient à un côté adjacent situé sur l'intersection du plan sécant avec le plan d'une face facile à reconnaître, car son nom correspond à un rectangle non encore numéroté et dans lequel se trouve le nom de l'extrémité choisie.

7° On détermine une nouvelle intersection que l'on choisit en s'aidant du tableau, et généralement parmi celles qui passent par une extrémité de la partie utile trouvée sur le polygone section plane, afin d'être assuré que l'intersection aura une partie utile; on opère du reste comme au 4° et l'on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait considéré toutes les intersections, en évitant le plus possible celles qui seraient sans parties utiles.

8° On écrira enfin, dans leur ordre géométrique, les noms des

(*) On peut généralement se borner à dessiner les projections des intersections sur un des plans de projection, et quand la projection correspondante de la section plane est entièrement connue, on peut en déduire immédiatement la seconde projection.

sommets du polygone ou des polygones formant la section plane, ce qui ne présente aucune difficulté, grâce au tableau et sans même que l'on doive consulter l'épure; puis on dessine les projections de la section plane et l'on représente, d'après les conventions et les règles connues, le polyèdre et la section plane en tenant compte des hypothèses que l'on veut faire.

Remarque. — **167.** Rien n'empêche d'appliquer la règle précédente, même dans le cas du prisme ou de la pyramide, si l'on y croit trouver un avantage.

Exemple simple. — **168.** Pour bien montrer l'emploi de la règle générale précédente sur un exemple simple, considérons un polyèdre ABCDEF et un plan sécant parallèle à DE. Nous n'avons considéré qu'une projection (fig. 150.)

Construisons le tableau T avec les noms des faces du polyèdre. Ce tableau doit être construit par le lecteur dans ses états successifs. Le plan sécant étant parallèle à DE, nous reconnaissons immédiatement dans T, les faces dont les intersections avec le plan sécant sont parallèles à DE.

T

ABCDE.	par. à DE. i_1 I.
ABF.	1, 8, 9. (8-9). VI.
BCF.	2, 7. (7-8). IV.
CDF.	3, 5. (5-7). III.
DEF.	par. à DE. i_2 (5-6). II.
EAF.	4, 5. (6-9). V.

Proposons-nous de chercher l'intersection i_1 du plan sécant avec le plan de la face ABCDE, parce que cette face présente le plus grand nombre d'arêtes et parce que nous connaissons la direction de l'intersection i_1; marquons le rectangle *ad hoc* du numéro d'ordre I; déterminons et traçons i_1; prenons sur i_1, les points de rencontre 1, 2, 3, 4 avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de la face ABCDE; inscrivons le point 1 de l'arête AB à côté du rectangle ABF, le point 2 de l'arête BC à côté du rectangle BCF, le point 3 de l'arête CD à côté du rectangle CDF, le point 4 de l'arête EA à côté du rectangle EAF; remarquons enfin, que la droite i_1 ne présente aucune partie utile.

Choisissons dans le polyèdre une nouvelle face pour en chercher l'intersection i_2 avec le plan sécant. Le tableau montre en ce moment,

que l'on connaît pour chacune des intersections restant à chercher, soit un point, soit la direction. Arrêtons-nous par exemple à la face DEF; marquons le rectangle *ad hoc* du numéro d'ordre II; déterminons et traçons i_1; prenons sur i_1 les points de rencontre 5 et 6 avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de la face DEF; inscrivons le point 5 de l'arête DF à côté du rectangle CDF, le point 6 de l'arête EF à côté du rectangle EAF; prenons sur i_1 la partie utile (5-6) dont nous inscrivons les extrémités près du numéro d'ordre II.

Choisissons dans le polyèdre une nouvelle face pour en chercher l'intersection avec le plan sécant. Le tableau montre en ce moment, que l'on connaît les intersections (3-5) et (4-6) respectivement avec les faces CDF et EAF. Chacune de ces intersections passe par une extrémité de la partie utile déjà trouvée. Arrêtons-nous par exemple, à l'intersection (3-5) avec la face CDF; marquons le rectangle *ad hoc* du numéro d'ordre III; traçons (3, 5); prenons sur (3,5) le point de rencontre 7 avec l'arête FC; inscrivons ce point 7 à côté du rectangle BCF; prenons sur (3, 5) la partie utile (5-7) dont nous inscrivons les extrémités près du numéro d'ordre III.

Choisissons dans le polyèdre une nouvelle face pour en chercher l'intersection avec le plan sécant. Le tableau montre en ce moment, que l'on connaît les intersections (2, 7) et (4, 6) respectivement avec les faces BCF et EAF. Chacune de ces intersections passe par une extrémité de la partie utile déjà trouvée (7-5-6). Arrêtons-nous par exemple à l'intersection (2, 7) avec la face BCF; marquons le rectangle *ad hoc* du numéro d'ordre IV; traçons (2, 7); prenons sur (2, 7) le point de rencontre 8 avec l'arête BF; inscrivons le point 8 à côté du rectangle ABF; prenons sur (2, 8, 7) la partie utile (7-8) dont nous inscrivons les extrémités près du numéro d'ordre IV.

Choisissons dans le polyèdre une nouvelle face pour en chercher l'intersection avec le plan sécant. Le tableau montre en ce moment, que l'on connaît les intersections (1, 8) et (4, 6) respectivement

avec les faces ABF et EAF. Chacune de ces intersections passe par une extrémité de la partie utile déjà trouvée (8-7-5-6). Arrêtons-nous à l'intersection (4, 6), qui semble mieux déterminée pour la section plane, que (1, 8); marquons le rectangle *ad hoc* du numéro d'ordre V; traçons (4, 6); prenons sur (4, 6) le point de rencontre 9 avec l'arête AF; inscrivons le point 9 à côté du rectangle ABF; prenons sur (4, 9, 6) la partie utile (6, 9) dont nous inscrivons les extrémités près du numéro d'ordre V.

En ce moment, il ne reste qu'un rectangle non numéroté celui qui correspond à l'intersection (1, 8, 9) avec la face ABF et donnant une partie utile (8-9).

T'

ABCDE.	3-4. (4-8). III.
ABF.	i_1. I.
BCF.	2-i_2. (4-5). II.
CDF.	5-6. (5-9). IV.
DEF.	7-9. (9-10). V.
EAF.	1-8-10. (8-10). VI.

La section plane se compose du polygone fermé (9-8-7-5-6-9) dont on trouve immédiatement les sommets consécutifs dans le tableau.

169. On expliquera de même la figure 151 et le tableau T' qui s'y rapporte; on y trouve le polygone d'intersection (8-10-9-5-4-8).

170. Les exemples qui suivent et dont les deux premiers sont très simples, montreront clairement la facilité avec laquelle la règle générale conduit mécaniquement, pour ainsi dire, au résultat dans tous les cas, même les plus compliqués.

EXERCICE XX. — **171.** *On donne* (fig. 154) *un tétraèdre* SABC *dont la base* ABC *se trouve dans le plan horizontal* α, *et un point* O.

On demande de chercher la section plane que fait, dans le tétraèdre, un plan mené par le point O, *parallèlement aux arêtes* SB *et* AC. (Examens d'entrée à l'École Militaire, 1891).

On emploiera la règle générale du numéro 166.

Dressons le tableau synthétique prescrit T. Ce tableau doit être construit par le lecteur dans ses états successifs.

Le plan sécant étant parallèle à SB, nous reconnaissons immédiatement dans T, les faces dont les intersections avec le plan sécant sont parallèles à SB; de même, le plan sécant étant parallèle à AC,

nous reconnaissons immédiatement les faces dont les intersections avec le plan sécant sont parallèles à AC.

T

ABC.	par. à AC, *i*. (M-N.) I.
SAB.	par. à SB, M. (M-Q). II.
SAC.	par. à AC, Q. (Q-P). III.
SBC.	par. à SB, N, P. (N-P). IV.

La face ABC du tétraèdre étant la seule face dont le plan α soit perpendiculaire à un plan de projection, cherchons l'intersection *i* de ce plan qui est debout avec le plan sécant; or, celui-ci renferme la droite *i* menée par O, parallèlement à SB; l'intersection *i* dont la projection verticale est connue, s'appuie sur *x* au point X et est donc connue, puisqu'elle est parallèle à AC. Marquons le rectangle *ad hoc* du numéro d'ordre I.

Prenons sur *i*, les points de rencontre M et N avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de la face ABC; inscrivons le point M de l'arête AB à côté du rectangle SAB, et le point N de l'arête BC, à côté du rectangle SBC; prenons *sur i* la partie utile MN dont nous inscrivons les extrémités près du numéro d'ordre I.

Choisissons dans le polyèdre une nouvelle face pour en chercher l'intersection avec le plan sécant. Le tableau montre en ce moment, que l'on connaît les intersections avec les faces SAB et SBC. Arrêtons-nous par exemple, à l'intersection avec SAB; marquons le rectangle *ad hoc* du numéro d'ordre II, menons l'intersection par M parallèlement à SB; prenons-en le point de rencontre Q avec SA, inscrivons le point Q à côté du rectangle SAC et prenons la partie utile MQ, dont nous inscrivons les extrémités près du numéro d'ordre II.

Le tableau montre que les deux dernières intersections à représenter sont connues; nous avons tracé l'intersection correspondante au compartiment III, puis celle correspondante au compartiment IV. Cette dernière droite est connue par deux points et par sa direction, de sorte que l'une de ces trois conditions servira de vérification au tracé.

Le tableau donne comme section plane, le contour MNPQ qui est un parallélogramme.

Dans la figure 155, nous avons représenté ce qui reste de la

pyramide, quand on supprime toute la partie située au-dessus ou en arrière du plan sécant.

Les commençants s'exerceront utilement à représenter ce qui reste de la pyramide quand on supprime toute la partie située au-dessous ou en avant du plan sécant.

EXERCICE XXI. — **172.** *On donne un prisme dont la base* ABCD (fig. 148) *est placée dans le plan horizontal* α *et dont les arêtes sont parallèles à la droite* d.

On demande de chercher la section plane que fait, dans le prisme, le plan sécant (1, 2).

On emploiera la règle générale du numéro 166.

Dressons le tableau synthétique prescrit. Ce tableau doit être construit par le lecteur dans ses états successifs.

La droite x se trouvant dans le plan α est l'intersection du plan sécant avec le plan de base du prisme; marquons le rectangle correspondant du numéro d'ordre I; prenons sur x, les points de rencontre X, Y, Z avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de la face ABCD; inscrivons le point X de l'arête AD à côté du rectangle (DA, *d*), le point Y de l'arête CD à côté du rectangle (CD, *d*), le point Z de l'arête BC à côté du rectangle (BC, *d*); remarquons enfin que l'intersection x ne présente aucune partie utile.

ABCD.	I.
AB, *d*.	M, Q. V. (M-Q).
BC, *d*.	Z, P. IV. (P-Q).
CD, *d*.	Y, N. III. (N-P).
DA, *d*.	X. II. (M-N).

Choisissons dans le polyèdre une face, par exemple (AD, *d*), pour en chercher l'intersection avec le plan sécant et marquons le rectangle correspondant du numéro d'ordre II. Nous connaissons sur l'intersection un point X et pour en déterminer un second point, coupons les deux plans par un plan auxiliaire contenant l'une des droites situées dans les plans dont on cherche l'intersection. Les points les plus importants de l'intersection sont ceux qui sont situés sur les arêtes issues des points A et D. Il est donc avantageux d'employer un plan auxiliaire passant par une de ces arêtes et nous choisirons

l'arête du point A, attendu que le point que nous trouverons ainsi, sera plus loin du point X que celui que l'on trouverait sur l'arête du point D.

Nous avons mené, par l'arête du point A, le plan auxiliaire debout β qui coupe le plan (*1, 2*) suivant la droite *i*, dont la rencontre M avec l'arête du point A détermine, avec X, l'intersection des plans (AD, *d*) et (*1, 2*).

Prenons sur MX les points de rencontre M et N avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de la face (AD, *d*); inscrivons le point M de l'arête du point A à côté du rectangle (AB, *d*) et le point N de l'arête du point D à côté du rectangle (CD, *d*); prenons aussi sur MX, la partie utile MN, dont nous inscrivons les extrémités près du numéro d'ordre II.

Choisissons dans le polyèdre une nouvelle face pour en chercher l'intersection avec le plan sécant. Le Tableau montre en ce moment que l'on connaît l'intersection YN avec la face (CD, *d*), marquons le rectangle correspondant du numéro d'ordre III, traçons la droite NY, prenons-en le point le rencontre P avec l'arête (C, *d*), inscrivons le point P à côté du rectangle (BC, *d*) et prenons la partie utile NP dont nous inscrivons les extrémités près du numéro d'ordre III.

On a de même l'intersection IV ou ZP, donnant le point Q à inscrire dans le compartiment V, et la partie utile PQ ; enfin l'intersection V ou MQ.

La droite ZPQ n'étant connue que par deux points Z et P très rapprochés, le prolongement de ZP détermine mal le point Q et il serait utile de vérifier ce point, par exemple en le déterminant directement au moyen d'un plan auxiliaire debout mené par l'arête du point B.

Nous avons représenté le tronc de prisme compris entre le plan β et le plan (*1, 2*).

Remarque. — Entre l'emploi de la méthode générale et l'emploi de la méthode particulière donnée (n° 162) pour le cas d'un prisme, on pourra choisir dans chaque cas particulier.

EXERCICE XXII. — **173.** *On donne une pyramide* SABCDF (fig. 153) *et le plan sécant* (1, 2).

On demande la section plane en employant la règle générale du numéro 166.

Dressons le tableau prescrit. Ce tableau doit être construit par le lecteur dans ses états successifs.

Considérons alors que la face ABCDF présente plus d'arêtes que chacune des autres faces; si donc on cherche l'intersection *i* de son plan avec le plan sécant, les points de rencontre de *i* avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de la face ABCDF pourront être, dans les limites de l'épure, en plus grand nombre que si l'on avait choisi toute autre face du polyèdre et par conséquent, le plan de cette face est le plus avantageux à choisir d'abord, au point de vue de la détermination de la section plane. Marquons le rectangle correspondant du numéro d'ordre I.

La détermination de *i* a été faite au moyen d'un premier plan auxiliaire debout passant par BC et dont l'intersection *k* avec le plan (*1, 2*) a donné, par sa rencontre avec BC un premier point X de *i*. Nous avons employé ensuite un nouveau plan auxiliaire projetant verticalement DC, son intersection *l* avec le plan sécant a été déterminée en prenant les points où *l* s'appuie sur les droites *1* et *k* du plan sécant (n° 101); le point Y où *l* rencontre CD est un second point de l'intersection XY du plan (*1, 2*) avec le plan de la face ABCDF.

Prenons sur l'intersection XY, les points M, X, Y, R, Z, qui appartiennent respectivement aux intersections du plan sécant avec le plan des faces ASB, BSC, CSD, DSF, FSA.

La partie utile de l'intersection XY est MR dont nous inscrivons les extrémités à côté du numéro d'ordre I.

Déterminons le côté adjacent à MR et passant par M. Ce côté appartient à l'intersection des plans (*1, 2*) et ASB. Marquons le rectangle correspondant du numéro d'ordre II.

Nous connaissons un point M de l'intersection et nous en avons déterminé un second N au moyen du plan auxiliaire projetant

horizontalement la droite SB du plan ASB. Traçons la droite MN.

Prenons sur MN les points U et N qui appartiennent respectivement aux intersections du plan sécant avec les plans des faces ASF et BSC.

La partie utile de l'intersection UMN est MN dont nous inscrivons les extrémités à côté du numéro d'ordre II.

Le tableau montre en ce moment que nous connaissons les deux intersections XN et ZU du plan sécant avec les faces SBC et SFA, mais ZU ne donne pas de partie utile comme le montre l'épure et nous préférons passer à l'intersection ZN qui donne le côté adjacent à MN.

Marquons le compartiment correspondant à XN du numéro d'ordre III.

Prenons sur XN le point P qui appartient à l'intersection des plans (*1*, *2*) et CSD.

La partie utile de XN est NP dont nous inscrivons les extrémités à côté du numéro d'ordre III.

Le côté adjacent à NP appartient à l'intersection IV du plan sécant avec le plan de la face CSD, intersection déjà déterminée par les points P et Y.

Prenons sur PY le point Q qui appartient à l'intersection des plans (*1*, *2*) et DSF.

La partie utile de PY est PQ.

Le côté adjacent à PQ appartient à l'intersection V du plan sécant avec le plan de la face DSF, intersection déjà déterminée par les points Q et R.

Prenons sur QR le point V qui appartient à l'intersection des plans (*1*, *2*) et FSA.

La partie utile de QRV est QR.

ABCD.	X, Y. (M-R). I.
SAB.	M, N. (M-N). II.
SBC.	X, N. (N-P). III.
SCD.	Y, P. (P-Q). IV.
SDF.	R, Q. (Q-R). V.
SFA.	Z, U, V.

Le tableau montre en ce moment que nous avons obtenu un polygone d'intersection MNPQRM et qu'il ne nous reste plus qu'à considérer l'intersection du plan sécant avec le plan de la face SFA. Or, cette intersection est déjà connue par les trois points Z, U, V qui doivent comme vérification, se trouver en ligne droite, et l'intersection ZUV ne présente aucune partie utile ; la section plane est donc formée du seul polygone MNPQRM.

Nous avons représenté la pyramide SABCDF, en la considérant comme un corps plein et opaque sur lequel on aurait tracé la section plane.

Les commençants s'exerceront utilement à représenter ce qui reste de la pyramide précédente, en enlevant du corps toute la partie située au-dessus ou en avant du plan sécant, ou bien en enlevant du corps toute la partie située au-dessous ou en arrière du plan sécant.

Remarque. — Entre l'emploi de la méthode générale et l'emploi de la méthode particulière donnée (n° 163) pour le cas d'une pyramide, on pourra choisir dans chaque cas particulier.

EXERCICE XXIII. — 174. *Par un point donné M, mener un plan coupant une pyramide quadrangulaire quelconque suivant un parallélogramme; déterminer les projections de la section plane.*

Soit (fig. 156) SABCD la pyramide donnée. Le plan sécant doit couper les plans des faces SAD et SBC suivant deux parallèles, donc il doit être parallèle à l'intersection SF de ces plans. De même, il devra être parallèle à l'intersection SG des plans des faces SAB et SCD. On voit donc, qu'il faudra construire les intersections des faces opposées de la pyramide, mener par le point M un plan parallèle à ces intersections et chercher la section faite par ce plan, dans la pyramide.

Comme on sait d'avance que la section est un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux intersections des faces opposées, il suffira de connaître un point d'un côté de la section plane.

Dans l'épure (fig. 157), la base ABCD de la pyramide a ses sommets dans le plan des deux droites AD et BC qui se coupent en F.

L'intersection *1* des plans des faces SBC et SAD est connue par le point S et par le point F. De même, l'intersection des faces SAB et SDC passe par S et par le point G de rencontre des arêtes AB et DC; nous n'avons, dans les limites de l'épure, qu'une projection du point G, de sorte que nous n'avons, immédiatement, qu'une projection de la droite *2*; la seconde projection de cette droite s'obtiendrait aisément (n° 99), mais elle ne sera pas nécessaire. Remarquons que l'on a aussi, immédiatement, la projection horizon-

tale de la droite FG ou *3* suivant laquelle le plan (*1, 2*) coupe le plan de base de la pyramide.

Par le point M, menons (n° 105) un plan parallèle au plan (*1, 2, 3*); à cet effet, nous avons mené, par M, une parallèle *1'* à *1* et, par le point X où *1'* perce le plan de la base, nous avons construit une parallèle *3'* à *3*. Le point X a du reste été déterminé au moyen du plan auxiliaire qui projette horizontalement la droite *1'*, et la projection verticale de *3'* a été déduite de la projection horizontale, au moyen du point d'appui Z de *3'* sur CD. En construisant, comme nous l'avons fait, le plan passant par M et parallèle au plan (*1, 2*), la droite *3'* est l'intersection de ce plan parallèle avec le plan de la base de la pyramide.

Nous laissons au lecteur le soin de dresser le tableau synthétique et nous nous bornerons à quelques indications concernant la recherche de la section plane.

L'intersection *3'* ne présente pas de partie utile comprise dans la base ABCD, mais ses points de rencontre Y, Z, U et V avec les côtés AB, CD, AD et BC, sont des points qui appartiennent aux intersections du plan (*1'*, *3'*) avec les faces SAB, SDC, SAD et SBC. Les intersections du plan (*1'*, *3'*) avec les faces SAD et SBC passent donc par U et V et sont connues, puisqu'elles sont parallèles à SF; elles donnent les sommets N, Q, O et P de la section plane. Les intersections du plan (*1'*, *3'*) avec les faces SAB et SCD sont donc aussi connues, et comme vérification, elles doivent passer par les points Y et Z et être parallèles à SG.

On pourra vérifier que les deux projections de chacun des points Y, U, V, N, O, P et Q, appartiennent à une même ligne de rappel.

Nous avons représenté la pyramide considérée comme limitée entre le sommet et le plan de la base.

Nous engageons les commençants à représenter ce qui reste de la pyramide quand on enlève, ou bien la portion comprise entre le sommet et la section, ou bien la portion comprise entre la base et la section.

Remarque. — Au lieu de chercher l'intersection du plan de base avec le plan mené par M, parallèlement au plan (*1, 2*), on aurait pu chercher l'intersection du plan mené par M, avec le plan d'une

des faces de la pyramide, par exemple avec le plan de la face SDC. L'intersection doit être parallèle à *2*, et il suffira d'en chercher un point. A cet effet, on emploierait par exemple, comme plan auxiliaire, le plan vertical mené par *1'*. Le point étant connu, on aurait en projection horizontale, la droite sur laquelle se trouvera le côté PQ et l'on en déduirait les projections de ce côté. Dès lors, on pourrait dessiner les projections des autres côtés de la section plane.

L'épure serait ainsi plus simple que celle de la figure 142, et nous engageons les commençants à la faire, mais en traçant celle-ci, nous avons voulu montrer, dans la détermination d'une section plane faite dans un polyèdre, l'emploi de l'intersection du plan sécant avec le plan d'une des faces du polyèdre, lorsque sur l'intersection, il n'y a pas de partie utile.

EXERCICE XXIV. — **175.** Par un point donné, mener un plan coupant une pyramide à base trapézoïdale, suivant un parallélogramme; déterminer les projections de la section plane.

EXERCICE XXV. — **176.** *On donne les points* A, B, C, D, E, F (fig. 158).

DAB.	par. à AB. (1-2). I.
DBC.	2. (2-3). II.
DCA.	1, 4, 7. (1-7). VI.
EAB.	par. à AB. 5. (5-6). IV.
EBC.	par. à EC. 3. (3-5). III.
ECA.	par. à EC. 6. (6-7). V.

On demande : 1° De construire le tétraèdre DABC *et de se rendre compte que le point* E *est à l'intérieur de cette figure;*

2° De considérer le corps formé par le tétraèdre précédent dont on a enlevé ce qui est à l'intérieur du tétraèdre EABC (*hexaèdre non convexe*);

3° De mener par F *un plan parallèle aux droites* AB *et* EC.

4° De construire la section faite par le plan précédent dans l'hexaèdre;

5° De représenter le corps solide, plein et opaque, limité à l'hexaèdre, après en avoir enlevé ce qui est au-dessus du plan sécant. (*)

Le plan sécant mené par F est le plan (*a*, *b*); pour le surplus,

(*) Cet exercice a été préparé pour nos élèves, par M. Michelet, quand il était Capitaine du Génie et Répétiteur à l'École Militaire.

nous nous bornons à donner l'épure relative à cet exercice ainsi que le tableau synthétique de la recherche de la section plane; celle-ci est, d'après le tableau, le polygone fermé (1-2-3-5-6-7-1).

Remarque générale. — **177.** Les sommets de la section plane sont es points d'intersection des arêtes du polyèdre avec le plan sécant. On pourrait se proposer de les déterminer (n°s 164 et 165) en menant, comme on sait, par chaque arête, un plan auxiliaire. Or, si l'on prend pour plans auxiliaires, les plans des faces du polyèdre, le procédé revient à employer la méthode générale que nous avons exposée pour chercher la section plane (n° 166) et si l'on prenait d'autres plans auxiliaires, par exemple des plans verticaux ou debout, on compliquerait considérablement l'épure, à moins de circonstances spéciales comme celles que nous avons indiquées aux numéros 162 et 163.

PROBLÈME XXI.

178. *Déterminer les points d'intersection d'une droite et d'un polyèdre.*

On mènera un plan auxiliaire par la droite donnée, puis on cherchera l'intersection du polyèdre et de ce plan; les points de rencontre de la droite avec la section plane, seront les points demandés.

Le meilleur plan auxiliaire sera, en général, un plan vertical ou debout (n° 159).

§ 6. INTERSECTION DE DEUX POLYÈDRES.

Détermination de l'intersection. — **179.** La détermination de l'intersection de deux polyèdres, présente une grande importance au point de vue pratique (*) et bien que cette détermination ne comporte que les opérations nécessaires pour chercher des intersections de plans (n°s 121 à 125) ou des points communs entre des droites et des

(*) Par exemple, dans la représentation des cristaux maclés. Nous donnerons plus loin les épures d'une macle de FLUORINE et d'une macle de FELDSPATH ORTHOSE (n°s 271 et s.).

plans (nº 133), il est utile de faire connaître certaines considérations qui pourront simplifier considérablement l'épure.

PROBLÈME XXII.

180. *Déterminer les projections de l'intersection de deux polyèdres quelconques.*

On pourrait chercher les sommets de l'intersection en cherchant successivement les points de rencontre des arêtes de chacun des polyèdres avec les faces de l'autre polyèdre (nºs 133 et 134) et cela peut parfois être fait avantageusement, lorsqu'on veut connaître l'intersection de deux pyramides, ou d'un prisme et d'une pyramide, ou de deux prismes, si l'on se trouve dans certaines conditions spéciales (nºs 187 à 189).

181. Mais il sera en général plus avantageux (nº 184) de chercher successivement les intersections des plans des faces de l'un des polyèdres avec chacun des plans des faces de l'autre polyèdre, et de prendre sur chaque intersection *i* (fig. 159), la partie commune (7-*11*) ou les parties communes aux faces situées dans les plans correspondants. Ces parties sont appelées *parties utiles* de l'intersection, parce que chacune d'elles est nécessairement un côté de l'intersection. Dans la figure 160, la partie utile est (*2-9*).

Nous allons voir que, contrairement à l'opinion de certains auteurs qui croient que les tracés sont laborieux et exigent de nombreux tâtonnements, l'intersection peut se déterminer rapidement et facilement.

Remarquons, ce qui est bien naturel, que toutes les fois que l'on aura cherché l'intersection *i* du plan d'une face de l'un des polyèdres avec le plan d'une face de l'autre polyèdre, les points de rencontre 1,2,3... de l'intersection avec les différentes arêtes prolongées au besoin dans les deux faces, appartiennent chacun à l'intersection de deux faces faciles à reconnaître si l'on a désigné chaque face par les noms des sommets de cette face et que l'on ait fait le tableau des noms des faces. Ainsi (fig. 159) le point *1*, situé sur l'arête $A_1 B_1$, appartient à l'intersection du plan de la face $A_2 B_2 C_2$... avec le plan

d'une seconde face passant par $A_1 B_1$; le point *g* situé sur l'arête $C_1 D_1$ appartient à l'intersection du plan de la face $A_1 B_1 C_1$... avec le plan d'une seconde face passant par $C_1 D_1$; etc.

C'est la connaissance et l'utilisation méthodique des points de rencontre 1, 2, 3,... et des autres circonstances spéciales pouvant se présenter qui simplifient considérablement les opérations et nous offrons, à cet effet, une règle générale dont on pourra suivre l'application dans chacune des figures 161 et 162 (nos 185 et 186).

Règle générale pour la recherche de l'intersection de deux polyèdres. —
182. 1° On construit un tableau présentant autant de colonnes verticales qu'il y a de faces dans l'un des polyèdres. On divise ces colonnes par des horizontales en autant de groupes de rectangles, qu'il y a de faces dans l'autre polyèdre. Au dessus des colonnes verticales, on inscrit respectivement les noms des faces de l'un des polyèdres et à gauche des groupes de rectangles formés par les horizontales, on inscrit respectivement les noms des faces de l'autre polyèdre, chacun de ces noms étant formé par les lettres désignant les sommets. De cette manière, il y a dans le tableau, un compartiment qui correspond à l'intersection du plan de chacune des faces de l'un des polyèdres avec le plan de chacune des faces de l'autre polyèdre.

Dans chacun de ces compartiments, on indique à mesure qu'on les trouve dans la suite, les points appartenant à l'intersection qui correspond au compartiment, et aussi toutes les autres indications utiles relatives à cette intersection; en particulier, on indique en chiffres romains par exemple, l'ordre dans lequel on considère successivement les intersections et, à côté, s'il y a lieu, les noms des extrémités des parties utiles.

Ce tableau est utile pour retrouver facilement, quand on veut faire la recherche d'une intersection, tout ce que l'on connaît déjà pour cette droite; il permet aussi, sans même que l'on doive consulter l'épure, de nommer tous les sommets du ou des polygones formant la ligne commune aux deux polyèdres, dans l'ordre de la succession géométrique de ces sommets, car une partie utile de cette ligne ne peut être suivie que d'une nouvelle partie utile ayant avec

la précédente une extrémité commune; il permet enfin une vérification facile des opérations.

2° On examine attentivement si l'on ne connaît pas, à priori, des points appartenant aux intersections à chercher, ou la direction, ou l'inexistence de certaines intersections. Ainsi, lorsque le plan d'une face d'un des polyèdres est parallèle à une arête XY de l'autre polyèdre, il coupe les plans des faces dont les noms contiennent les lettres X et Y suivant des parallèles à XY. Ainsi encore, lorsque le plan d'une face de l'un des polyèdres est parallèle au plan d'une face de l'autre polyèdre, on peut marquer d'un numéro d'ordre le compartiment correspondant qui ne recevra plus aucune autre indication, mais on tiendra compte de la remarque précédente. Si deux faces sont telles, que leurs projections horizontales ou verticales n'ont aucune partie commune, on pourra marquer de son numéro d'ordre le compartiment correspondant, car l'intersection de leurs plans ne contiendra aucune partie utile, etc.

Tous ces résultats et toutes autres remarques utiles (n° 183) qui peuvent être faites, à priori ou à posteriori, à propos des intersections à chercher, sont inscrites dans les compartiments *ad hoc*.

3° On choisit, dans les deux polyèdres, deux faces dont les plans semblent les plus avantageux pour en trouver l'intersection i_1; on distingue sous ce rapport, s'il y a lieu, les faces dont les plans seraient verticaux ou debout et les faces qui présentent le plus d'arêtes (n° 166, 3°).

4° Le choix étant fait, on le marque du numéro d'ordre I dans le rectangle correspondant; puis on détermine l'intersection i_1; on en trace les projections (*); on marque sur i_1 les points de rencontre 1, 2, 3... avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de chacune des faces; chacun de ces points appartient à l'intersection de deux faces faciles à reconnaître comme nous l'avons dit au numéro 181 et est inscrit dans le compartiment *ad hoc*; on prend sur l'intersection les parties utiles, s'il y en a.

(*) On peut généralement se borner à dessiner les projections des intersections sur un des plans de projection et quand la projection correspondante de l'intersection des polyèdres est entièrement connue, on en déduit la seconde projection.

5° S'il n'existe sur l'intersection i_1 aucune partie utile, il faut choisir dans les polyèdres deux nouvelles faces comme au 3°, en s'aidant du tableau pour faire le choix paraissant le meilleur, puis recommencer les opérations indiquées au 4°.

6° Supposons que l'on arrive à une intersection présentant une partie utile. On inscrit les noms des extrémités de cette partie utile à côté du numéro d'ordre qui classe l'intersection dans la suite des opérations ; chacune de ces extrémités appartient à un côté adjacent situé sur l'intersection de deux faces faciles à reconnaître, car celles-ci correspondent à un compartiment non barré dans lequel se trouve le nom de l'extrémité choisie.

7° On détermine alors une nouvelle intersection que l'on choisit en s'aidant du tableau, et généralement parmi celles qui passent par une extrémité de la partie utile trouvée sur le polygone commun aux polyèdres, afin d'être assuré que l'intersection aura une partie utile ; on opère du reste comme au 4° et l'on continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait considéré toutes les intersections, en évitant le plus possible celles qui seraient sans parties utiles.

8° On écrira enfin, dans leur ordre géométrique, les noms des sommets du polygone ou des polygones formant l'intersection des polyèdres, ce qui ne présente aucune difficulté grâce au tableau et sans même que l'on doive consulter l'épure; puis on dessine les projections de l'intersection et l'on représente d'après les conventions et les règles connues, les polyèdres et leur intersection en tenant compte des hypothèses que l'on veut faire.

Remarque I. — 183. Il pourra se présenter des circonstances spéciales. Ainsi, la partie utile sur l'intersection des plans de deux faces pourra être nulle, alors un sommet de l'un des polyèdres sera situé sur la surface de l'autre polyèdre, sur un sommet de cette surface, ou sur un point quelconque d'une arête de cette surface, ou à l'intérieur d'une face. Mais nous n'insistons par sur ces circonstances spéciales, qui n'échappent pas aux préceptes de la règle générale.

Remarque II. — 184. Les sommets des polygones communs à deux

polyèdres sont les points d'intersection des arêtes de chacun des polyèdres avec l'autre polyèdre. On pourrait se proposer de les déterminer (n° 180) en menant, comme on sait, par chaque arête, un plan auxiliaire. Or, si l'on prend pour plans auxiliaires, les plans des faces du polyèdre, le procédé revient à employer la méthode générale (n° 182) et si l'on prenait d'autres plans, on compliquerait considérablement l'épure, à moins de circonstances spéciales dans le cas de deux pyramides, de deux prismes ou d'une pyramide et d'un prisme (n°s 187 à 189).

EXERCICE XXVI. — **185.** *Déterminer l'intersection des polyèdres* ABCD *et* EFGHE'F'G'H', *présentant chacun une face dans le plan debout* α (fig. 162).

	DAB.	DBC.	DCA.	ABC.
EFF'E'.	1. (12-11). XI.	4-11. (11-15). XII.	12-17. (12-18). XIII.	VII.
FGG'F'.	I.	5-15-21. (15-21). XV.	8-18. (21-18). XIV.	VIII.
GHH'G'.	2-27-29-31. (29-31). XX.	6-23-26. (26-29). XVII.	9-20. (25-26). XVI.	IX.
HEE'H'.	3-13-30. (30-31). XIX.	II.	10-19-25. (25-30). XVIII.	X.
EFGH.	IV.	V.	VI.	III.

Nous désignerons le polyèdre ABCD par P et l'autre polyèdre par Q.

Dressons le tableau synthétique prescrit qui devra être construit par le lecteur dans ses états successifs.

Nous reconnaissons immédiatement que les faces correspondantes aux compartiments I et II ne sauraient avoir de partie utile en commun.

Nous marquons aussi de son numéro d'ordre le compartiment III qui ne recevra plus aucune autre indication puisque les faces correspondantes sont dans un même plan ; de plus, ce plan commun donne avec chacun des polyèdres, des intersections AB, BC, CA, EF, FG,.. dont nous pouvons marquer d'un numéro d'ordre IV, V, VI,.... X, chacun des compartiments correspondants et dont les points de rencontre immédiatement connus et numérotés 1, 2,.... 10, ont été inscrits dans les rectangles *ad hoc*, par la simple lecture des deux droites dont on considère la rencontre.

Aucune de ces intersections ne présente de partie utile.

Cherchons l'intersection des plans des faces EFF'E' et DAB, et marquons le compartiment correspondant du numéro d'ordre XI. Nous connaissons un point *1* de l'intersection et nous en avons déterminé un second *11* au moyen du plan auxiliaire debout β mené par DB. Traçons *1-11*; prenons les points de rencontre *11*, *12*, *13*, *14* avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de chacune des faces correspondantes à XI; inscrivons chacun de ces points dans le compartiment *ad hoc*; prenons la partie utile *11-12* et inscrivons-en les extrémités à côté du numéro d'ordre XI.

Le tableau montre en ce moment que nous connaissons les deux intersections *4-11* et *3-13* et comme *4-11* comprend un côté adjacent au côté trouvé, nous considérerons maintenant cette intersection de préférence à l'autre. Marquons le compartiment correspondant du numéro d'ordre XII. Traçons *4-11*; prenons les points de rencontre *15*, *16*, *17* avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de chacune des faces correspondantes à XII; inscrivons chacun de ces points dans le compartiment *ad hoc*; prenons la partie utile *11-15* et inscrivons-en les extrémités à côté du numéro d'ordre XII.

Le tableau montre en ce moment que nous connaissons les trois intersections *12-17*, *5-15* et *3-13* dont les deux premières comprennent chacune un côté adjacent à un contour déjà trouvé. Choisissons *12-17* et marquons le compartiment correspondant du numéro d'ordre XIII. Traçons *12-17*; prenons les points de rencontre *18* et *19* avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de chacune des faces correspondantes à XIII; inscrivons chacun de ces points dans le compartiment *ad hoc*; prenons la partie utile *12-18* et inscrivons-en les extrémités à côté du numéro d'ordre XIII.

Le tableau montre en ce moment que nous connaissons les quatre intersections *5-15*, *8-18*, *3-13* et *10-19* dont les deux premières comprennent chacune un côté adjacent au contour déjà trouvé. Choisissons *8-18* et marquons le compartiment correspondant du numéro d'ordre XIV. Traçons *8-18*; prenons les points de rencontre *20*, *21* et *22* avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de chacune des faces correspondantes à XIV; inscrivons

chacun de ces points dans le compartiment *ad hoc ;* prenons la partie utile *18-21* et inscrivons-en les extrémités à côté du numéro d'ordre XIV.

Le tableau montre en ce moment que nous connaissons les quatre intersections nouvelles *5-15-21*, *9-20*, *3-13* et *10-19*, dont la première comprend un côté adjacent au contour déjà trouvé. Choisissons cette intersection et marquons le compartiment correspondant du numéro d'ordre XV. Traçons *5-15-21*; prenons les points de rencontre *23* et *24* avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de chacune des faces correspondantes à XV; inscrivons chacun de ces points dans le compartiment *ad hoc*; prenons la partie utile *15-21* et inscrivons-en les extrémités à côté du numéro d'ordre XV.

Le tableau montre en ce moment que nous connaissons pour l'intersection cherchée le contour *11-12-18-21-15-11* qui constitue un polygone fermé. Il montre aussi par ses cases non encore numérotées, qu'il reste à considérer cinq intersections dont quatre sont déjà connues chacune par deux points. Choisissons la droite *9-20* déterminée par deux points suffisamment éloignés et marquons le compartiment correspondant du numéro d'ordre XVI. Traçons *9-20*, prenons les points de rencontre *25*, *26* et *27* avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes de chacune des faces correspondantes à XVI; inscrivons chacun de ces points dans le compartiment *ad hoc*; prenons la partie utile *25-26* et inscrivons-en les extrémités à côté du numéro d'ordre XVI.

	DAB.	DBC.	DCA.	ABC.
EFF'E'.	1. (11-12). XI.	4-11. (11-15). XII.	12-17. (12-18). XIII.	VII.
FGG'F'.	I.	5-15-21. (15-21). XV.	8-18. (18-21). XIV.	VIII.
GHH'G'.	2.	6-23.	9-20.	IX.
HEE'H'.	3-13.	II.	10-19.	X.
EFGH.	IV.	V.	VI.	III.

En continuant de la même manière, ce qui ne présentera plus aucune difficulté, nous obtenons pour l'intersection cherchée un nouveau contour *25-26-29-31-30-25* qui constitue encore un polygone fermé. Le tableau montre, en ce moment, qu'on a considéré les

intersections des plans de toutes les faces du polyèdre P avec les plans de toutes les faces du polyèdre Q.

Remarque I. — Nous n'avons dessiné sur l'épure, en projection verticale, que les contours de l'intersection des deux polyèdres.

Remarque II. — Nous avons représenté le polyèdre Q, en le considérant comme un corps isolé plein et opaque dans lequel on aurait enlevé la partie comprise dans le polyèdre P.

Les commençants s'exerceront utilement à représenter les polyèdres P et Q, considérés comme ne formant qu'un seul corps ; ou bien à représenter le polyèdre P, considéré comme un corps isolé dans lequel on aurait enlevé la partie comprise dans Q ; ou bien à représenter le solide commun aux polyèdres P et Q.

Remarque III. — On remarquera que pour déterminer complètement l'intersection des deux polyèdres, nous n'avons employé qu'un seul plan auxiliaire. Cela est dû au soin que nous avons pris de toujours marquer, sur l'intersection des plans de deux faces, les points de rencontre de cette intersection avec les droites indéfinies sur lesquelles se trouvent les arêtes des faces.

EXERCICE XXVII. — 186. *Déterminer l'intersection des tétraèdres* $A_1B_1C_1D_1$ *et* $A_2B_2C_2D_2$ (fig. 161).

	$A_1 B_1 C_1$. hor.	$B_1 C_1 D_1$.	$C_1 D_1 A_1$.	$D_1 A_1 B_1$.
$A_2 B_2 C_2$. debout	I.	3. (10-11). VIII.	6-10-24-25. (10-25). XIV.	XVI.
$B_2 C_2 D_2$.	II.	4-11. (11-14). IX.	13-15-23. (23-25). XIII.	9-14. (14-17). X.
$C_2 D_2 A_2$. hor.	IV.	par. à $B_1 C_1$. (1-2). V.	par. à $A_1 C_1$. 2. (2-7). VI.	par. à $A_1 B_1$. 1-5. (1-8). VII.
$D_2 A_2 B_2$.	III.	12-18-21. XV.	7-20. (7-23). XII.	8-17. (8-17). XI.

Nous nous bornons à donner l'épure et le tableau qui s'y rapporte, mais nous ferons observer :

1° Que le point B_2 se trouve dans le plan de la face $A_1 B_1 C_1$, hors de cette face et que les intersections I, II, III, de ce plan avec les faces $A_2B_2C_2$, $B_2C_2D_2$, $D_2A_2B_2$ ne peuvent donc présenter de parties utiles;

2° Que les plans $A_1 B_1 C_1$ et $C_1 D_1 A_1$ tous deux horizontaux, ne donnent aucune intersection ; le compartiment IV ne recevra donc aucune indication, mais il faut observer que les intersections V, VI, VII, du plan de la face $C_1 D_1 A_1$ avec les plans des faces $B_1 C_1 D_1$, $C_1 D_1 A_1$ et $D_1 A_1 B_1$, ont des directions connues que nous signalons dans le tableau ;

3° Que les plans des faces $A_1 B_1 C_1$ et $C_1 D_1 A_1$ sont debout et avantageux pour en déterminer les intersections avec les plans des faces de l'autre polyèdre.

Le lecteur qui voudra bien se rendre compte de l'emploi de la règle, devra construire le tableau dans ses états successifs.

PROBLÈME XXIII.

187. *Déterminer les projections de l'intersection de deux pyramides ayant respectivement comme bases, les polygones* s *et* t, *et comme sommets, les points* S *et* T.

Nous connaissons une méthode générale (n° 182) pour déterminer l'intersection de deux polyèdres quelconques. Mais nous allons montrer qu'on pourra déterminer, très-aisément, les sommets des polygones d'intersection de deux pyramides (n° 183), *si l'on trouve, dans les limites de l'épure, l'intersection des plans des bases* s *et* t *et les points de rencontre de ces plans avec la droite* ST *des sommets des deux pyramides.*

Les sommets situés sur les arêtes des bases *s* et *t* et appartenant à l'intersection des pyramides, sont les extrémités des *parties utiles* de l'intersection des plans des bases.

D'autre part, les sommets situés sur une arête SA de la surface latérale de l'une des pyramides (S, *s*), sont les points d'intersection de cette arête avec l'autre pyramide (T, *t*). Or, pour déterminer ces points de rencontre (n° 178), nous pourrons prendre un plan auxiliaire passant par l'arête considérée SA et par le sommet T de l'autre pyramide (T, *t*); ce plan auxiliaire coupera la surface latérale de cette dernière pyramide, suivant des droites passant par le sommet T et dont les intersections avec l'arête choisie SA seront les points cherchés.

Remarquons que tous les plans auxiliaires, choisis comme il vient d'être dit et menés par les arêtes des surfaces latérales des pyramides, contiendront la droite des sommets; que leurs intersections, avec chaque plan de base, passeront par le point de rencontre de ce plan avec la droite ST des sommets; que les intersections, de chaque plan auxiliaire avec les plans des bases *s* et *t*, se rencontreront sur l'intersection de ces plans et enfin, que l'intersection, d'un plan auxiliaire avec le plan d'une base *s*, rencontrera le contour de cette base, en des points appartenant à l'intersection du plan auxiliaire avec la surface latérale de la pyramide ayant *s* comme base.

Des considérations qui précèdent, on déduit la méthode générale suivante pour trouver l'intersection de deux pyramides, ayant respectivement les polygones *s* et *t* comme bases et les points S et T comme sommets.

1° On détermine l'intersection *i* des plans des bases. Les *parties utiles* de cette intersection sont des côtés appartenant à l'intersection des deux pyramides.

2° On cherche les points P et Q de rencontre de la droite ST des sommets, respectivement avec les plans des bases *s* et *t*.

3° On imagine tous les plans auxiliaires passant par les arêtes de la surface latérale d'une pyramide (S, *s*) et par le sommet T de l'autre pyramide. Les intersections de ces plans avec le plan de la base *s* passeront par le point P et par les pieds des arêtes considérées. On prend les points de rencontre de ces intersections avec la droite *i* commune aux plans des bases. Par ces points et le point Q, on mène des droites qui seront les intersections des plans auxiliaires avec le plan de la base *t* de la seconde pyramide (T, *t*). On prend les points de rencontre de ces dernières intersections avec le contour de la base *t* et l'on joint ces points au sommet T; on obtient ainsi les intersections des plans auxiliaires avec la surface latérale de la pyramide (T, *t*). Les points situés à la rencontre de chaque arête de la première pyramide (S, *s*), avec les intersections obtenues dans la surface latérale de la seconde pyramide, par le plan auxiliaire correspondant à l'arête considérée, sont les points de rencontre de cette arête avec la seconde pyramide.

Puis, on imaginera tous les plans auxiliaires passant par les arêtes de la surface latérale de la seconde pyramide et l'on agira, comme précédemment, de façon à trouver les points de rencontre des arêtes de la seconde pyramide avec la surface latérale de la première.

4° On aura obtenu par les opérations précédentes, les sommets des polygones communs aux deux pyramides.

Pour tracer ces polygones, on partira d'un sommet situé nécessairement sur une arête, dans un certain plan auxiliaire. On déterminera dans un autre plan auxiliaire, facile à reconnaître, la seconde extrémité d'un côté passant par le point choisi et appartenant à un polygone commun aux deux pyramides. Puis, on déterminera un côté adjacent au précédent et l'on continuera ainsi, jusqu'à ce qu'on ait déterminé complètement le polygone commun. On recommencera d'une façon analogue, s'il y a d'autres polygones communs aux deux pyramides.

On pourra aussi, après avoir obtenu les sommets de l'intersection des deux pyramides, dresser le tableau dont nous avons parlé au numéro 182, et inscrire le nom de chaque sommet dans les compartiments qui correspondent aux intersections dont le point de rencontre est le sommet considéré. On aura ainsi, dans chaque compartiment, les extrémités d'un côté appartenant à l'intersection des deux polyèdres et l'on n'éprouvera plus aucune difficulté à joindre les différents sommets de cette intersection.

Remarque I. — On appelle *plan auxiliaire limite,* un plan auxiliaire passant par une arête d'une des pyramides et n'ayant que cette arête de commun avec la pyramide, tout en rencontrant l'autre pyramide.

Remarque II. — Si les pyramides SABCD et TEFGH (fig. 164) ont leurs bases dans un même plan, la détermination de l'intersection sera considérablement simplifiée.

Nous avons supprimé dans l'épure, toute la projection verticale que l'on construirait, du reste, très facilement.

On voit immédiatement, qu'il n'y a dans l'exemple choisi, sur le contour de chacune des bases, aucune partie située dans l'autre base, c'est-à-dire aucune partie utile.

Nous avons déterminé le point de rencontre P de la droite des sommets, avec le plan unique des bases des deux pyramides. Les droites *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7* et *8* déterminent avec la droite ST une série de plans auxiliaires passant par les arêtes des pyramides. Les plans auxiliaires (*1*, S) et (*8*, S) montrent qu'il n'y a, sur les arêtes SA et TG, ancun point appartenant à l'intersection des pyramides. Les plans (*2*, S) et (*7*, S) sont des plans auxiliaires limites. Les plans passant par les droites *2, 3, 4, 5, 6* et 7 donnent respectivement les points sur les arêtes TE, SB, TH, SD, TF et SC. Il reste à tracer le contour de l'intersection, en agissant comme il a été dit au 4° de ce numéro.

Nous avons représenté la pyramide SABCD, en la considérant comme un corps isolé, dans lequel on a enlevé la partie comprise dans la pyramide TEFGH.

Les commençants s'exerceront à représenter la pyramide TEFGH, en la considérant comme un corps isolé, dans lequel on aurait enlevé la partie comprise dans l'autre pyramide ; ou bien, à représenter les deux pyramides, en les considérant comme ne formant qu'un seul corps ; ou bien, à représenter le solide commun aux deux pyramides.

Remarque III. — Si les deux pyramides n'ont pas même plan de base, on pourra, si l'on y trouve un avantage, choisir un plan comme plan de base unique, chercher les intersections de ces pyramides avec le plan choisi et agir comme il a été dit dans la Remarque II.

PROBLÈME XXIV.

188. *Déterminer les projections de l'intersection d'un prisme et d'une pyramide.*

On pourra, pour résoudre ce problème, employer la méthode à suivre pour résoudre le problème précédent, avec cette seule différence, que tous les plans auxiliaires contiendront la droite, menée par le sommet de la pyramide, parallèlement aux arêtes du prisme et couperont la surface latérale du prisme suivant des droites parallèles aux arêtes de ce polyèdre.

Nous engageons les commençants à traiter, d'après cette méthode, l'exercice du nº 185 (fig. 162). On supposera que l'on trouve, dans les limites de l'épure, le point de rencontre du plan α avec la droite, menée par le point D, parallèlement aux arêtes du prisme.

PROBLÈME XXV.

189. *Déterminer les projections de l'intersection de deux prismes.*

On pourra, pour résoudre ce problème, employer la méthode que nous avons donnée pour chercher l'intersection de deux pyramides, avec cette différence, que tous les plans auxiliaires seront parallèles aux arêtes des surfaces latérales des deux prismes. Ces plans auxiliaires couperont donc chaque plan de base suivant des droites parallèles, et la surface latérale de chaque prisme suivant des parallèles aux arêtes de ce prisme.

D'après ces indications, il sera facile de modifier les prescriptions de la méthode donnée au numéro 187.

EXERCICE XXVIII. — 190. *Étant donnés* (fig. 163) *deux prismes dont les bases* ABCDE *et* MNPQRS *sont placées dans le plan horizontal* α *et dont les arêtes sont respectivement parallèles aux droites* AA′ *et* NX, *on demande* :

1° *De chercher l'intersection des deux prismes ;*

2° *De déterminer la section plane faite dans le prisme à base* ABCDE *au moyen d'un plan, mené par* A′, *perpendiculairement aux arêtes de ce prisme ;*

3° *De représenter le prisme à base* ABCDE, *en le considérant comme un corps isolé plein et opaque, dans lequel on aurait enlevé la partie comprise dans l'autre prisme.*

1° Nous avons mené, par le point A′, le plan AA′Y, parallèle aux arêtes des deux prismes et nous en avons cherché l'intersection AY avec le plan α des bases.

Les intersections de ce plan α avec tous les plans auxiliaires sont parallèles à AY.

2° Le plan mené par A′ perpendiculairement aux arêtes du prisme à base ABCDE est le plan (a, b). Le point A′ est un sommet de la section plane.

Nous avons cherché directement sur les arêtes du prisme, les autres sommets de la section plane (n° 162), au moyen de plans auxiliaires projetant verticalement ces arêtes. Le plan projetant verticalement l'arête du point C coupe le plan (a, b) suivant la droite i dont la rencontre avec l'arête est le sommet C′. Les plans, projetant verticalement les autres arêtes, coupent le plan (a, b) suivant des droites parallèles à i et pour chacune desquelles, il nous a suffi de prendre le point situé sur a.

Nous laissons au lecteur le soin d'expliquer plus complètement l'épure.

CHAPITRE II.

Rabattements, rotations et changement des plans de projection.

---

§ 1. GÉNÉRALITÉS.

Utilité du changement des positions relatives d'une figure et des plans de projection. — **191.** Il peut arriver qu'une figure, rapportée à deux plans de projection, ne se trouve pas par rapport à ces plans, dans une position permettant d'obtenir promptement sur les projections de la figure, la solution d'une question qui s'y rapporte. On peut se proposer alors de chercher à donner à la figure et aux plans de projection, les positions relatives que l'on a reconnues comme étant les meilleures.

Ainsi, supposons que l'on demande une figure égale à une figure plane connue par ses projections; on sait (nº 6) que si le plan de la figure est parallèle à l'un des plans de projection, on aura immédiatement, sur ce plan, la solution demandée. Mais dans tous les autres cas, on ne saurait trouver, sur les projections de la figure, une réponse immédiate au problème.

192. Une figure n'étant pas située comme on le voudrait par rapport aux plans de projection, on pourra, pour lui donner relativement à ces plans une position différente :

1° Ou bien déplacer la figure;

2° Ou bien déplacer les plans de projection.

Déplacement de la figure. — **193.** On dit (fig. 165) qu'une figure est animée d'un *mouvement de translation rectiligne*, lorsque tous ses points décrivent sur des lignes droites parallèles, des chemins égaux.

On dit (fig. 48) qu'une figure mobile *tourne*, ou est animée d'un *mouvement de rotation*, autour d'une droite fixe *a* appelée *axe*, lorsque la figure mobile est invariablement liée à l'axe fixe et se meut de manière qu'un de ses points M reste dans un plan perpendiculaire à l'axe (n° 80).

On conclut immédiatement de cette définition que dans un mouvement de rotation :

1° Tout point M de la figure mobile décrit un arc de cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe; ce plan est appelé *plan du mouvement*;
2° Le centre O de l'arc de cercle décrit par le point M, est l'intersection du plan du mouvement avec l'axe;
3° Le rayon OM est la distance du centre au point qui tourne (n° 80).

194. On démontre que toute figure donnée dans une certaine position, peut être amenée dans une seconde position quelconque, en lui imprimant successivement un mouvement déterminé de translation rectiligne et un mouvement déterminé de rotation autour d'une droite appelée *axe*.

Or, par un mouvement de translation rectiligne, on ne change ni la forme ni la grandeur des projections de la figure. En effet, considérons (fig. 166) un triangle ABC projeté en A'B'C' sur le plan α; les droites égales et parallèles AM, BN, CP, décrites par les points A, B et C dans le mouvement de translation, se projettent suivant les droites égales et parallèles A'M', B'N', C'P', et le triangle M'N'P' est identique à A'B'C'. Un simple mouvement de translation imprimé à une figure, ne peut donc simplifier une question relative à cette figure et qu'il s'agit de résoudre sur les projections. Il en résulte qu'au point de vue spécial où nous devons nous placer, nous n'avons à considérer que les mouvements de *rotation*.

195. Quand il s'agit, en particulier, d'une figure plane dont on veut amener le plan COA (fig. 167) sur un plan parallèle à un plan de projection ou sur un autre plan quelconque AOB, on pourra faire tourner le plan donné COA autour de son intersection OA avec le plan AOB sur lequel on veut l'amener; ce mouvement de

rotation prend alors le nom de *rabattement* et l'axe de la rotation prend le nom de *charnière*.

Changement des plans de projection. — **196.** Si au lieu de déplacer la figure considérée, on préfère changer les plans de projection, les plans choisis H et V ne convenant pas, on peut toujours (fig. 168) substituer, au système primitif (H, V), tout autre système de plans α et β perpendiculaires entre eux. En effet, combinons le plan H, par exemple, avec un plan γ perpendiculaire à l'intersection de H et de α, et par suite perpendiculaire à H et à α. Nous pouvons facilement, comme nous le verrons plus loin (n° 244), déterminer sur le plan γ, la nouvelle projection de la figure. Puis, combinons le plan γ avec le plan α et enfin le plan α avec le plan β, en remplaçant chaque fois la projection de la figure sur le plan que l'on abandonne, par sa projection sur le nouveau plan choisi.

Remarque. — **197.** Du reste, qu'il s'agisse de déplacer la figure ou de changer les plans de projection, il suffit d'apprendre à suivre les projections d'un point quelconque, pour pouvoir déterminer à chaque instant, la position d'une figure par rapport aux plans de comparaison.

§ 2. RABATTEMENTS.

Règle générale. — **198.** Dans le rabattement d'un plan sur un autre plan, il faut :
1° *Déterminer la charnière ;*
2° *Marquer le sens dans lequel se fait le rabattement ;*
3° *Marquer. sur la figure dont on cherche le rabattement, les points qui, dans les limites du dessin, se trouvent sur la charnière ;*
4° *Chercher les rabattements des points de la figure, autres que ceux qui appartiennent à la charnière.*

Charnière. — **199.** La charnière est l'intersection du plan que l'on rabat avec le plan sur lequel on rabat (n°s 195 et 121 à 125).

Sens. — **200.** Supposons (fig. 167) que l'on veuille rabattre le plan CC'OA sur le plan BB'OA. Il est à remarquer que si dans

le plan CC'OA, la portion COA située d'un côté de la charnière se rabat sur AOB dans le sens de la pointe de la flèche F, l'autre portion C'OA se rabattra en sens inverse, sur B'OA. Or, si l'on cherche le rabattement sur BB'OA d'une figure située dans CC'OA, il est important de bien marquer le sens dans lequel on veut faire le rabattement et de bien voir, comment les différents points de la figure sont placés par rapport à la charnière OA, afin de savoir placer les points rabattus, de part et d'autre de OA, suivant la position qu'ils occupent par rapport à cette droite dans le plan à rabattre.

201. Pour marquer le sens dans lequel se fait le rabattement d'un plan α sur un plan β qui n'est pas de profil, nous prendrons la projection de la charnière sur un plan, horizontal ou de front, mais non perpendiculaire au plan β ; puis nous placerons perpendiculairement à cette projection, une flèche dont la pointe indiquera la projection de la partie du plan β, où devra s'appliquer la partie située dans le plan α, au-dessus ou en avant du plan β (nos 13 à 16), suivant que l'on considérera la projection horizontale ou verticale de la charnière.

On pourra aisément distinguer, dans le plan α, la partie située au-dessus du plan β de la partie située au-dessous de ce plan, quand on connaîtra dans le plan α, un point A de la première partie ; tous les points du plan α, dont les projections seront placées par rapport aux projections de la charnière, comme le sont les projections du point A, seront au-dessus de β ; les autres points du plan α seront au-dessous de β.

Si l'on voulait rabattre un plan α sur un plan β de profil, on pourrait placer la flèche sur l'une des projections de la charnière, la pointe étant dirigée vers le haut ou le bas de l'épure, suivant que la partie située à droite de β dans le plan à rabattre, doit s'appliquer sur la partie située au-dessus ou au-dessous de α, dans le plan de profil.

202. Nous avons voulu montrer, dans le numéro précédent, qu'on peut indiquer facilement sur une épure, le sens d'un rabattement, quels que soient le plan à rabattre et le plan sur lequel on rabat. Mais nous devons faire remarquer qu'en pratique, on rabat presque toujours sur un plan parallèle à un plan de projection, car, ce que l'on a le plus souvent en vue dans un rabattement (n° 191), c'est de montrer une figure égale à une figure plane connue par ses projections.

203. *Quand nous rabattrons un plan donné sur un plan horizontal,*

le sens du mouvement sera indiqué par une flèche placée perpendiculairement sur la projection horizontale de la charnière. La pointe de la flèche marquera le sens dans lequel se rabattra la partie située, dans le plan à rabattre, au-dessus du plan sur lequel on rabat.

Quand nous rabattrons un plan donné sur un plan de front, le sens du mouvement sera indiqué par une flèche placée perpendiculairement sur la projection verticale de la charnière; la pointe de la flèche marquera le sens dans lequel se rabattra la partie située, dans le plan à rabattre, en avant du plan sur lequel on rabat.

Les points sur la charnière. — **204.** Ces points, immobiles dans un rabattement, appartiendront aussi à la figure rabattue.

Rabattements des points d'une figure autres que ceux qui appartiennent à la charnière. — **205.** Soit (fig. 167) à rabattre le plan CC'OA sur le plan BB'OA.

Rappelons-nous (n° 193) qu'un point tel que M décrit, dans un plan μ mené par M perpendiculairement à la charnière OA et appelé plan du mouvement, un arc de cercle dont le centre I est à l'intersection de ce plan μ avec la charnière et dont le rayon IM est la distance du centre au point qui tourne.

Donc, pour trouver le rabattement M_r du point M, il faudra :
1° *Mener par le point* M, *un plan perpendiculaire à la charnière* OA (n° 118);
2° *Chercher l'intersection* i *de ce plan avec le plan* BB'OA *sur lequel on rabat* (n°s 121 à 123);
3° *Prendre le point* I *où l'intersection* i *rencontre la charnière;*
4° *Chercher la distance du centre* I *au point* M *qui tourne;*
5° *Porter sur l'intersection* i, *à partir du centre* I, *le rayon* IM, *dans un sens déterminé par le sens du rabattement* (n°s 201 à 203).

On pourra répéter ces constructions pour les différents points qui déterminent la figure dont on cherche le rabattement, mais on aura égard à ce que nous dirons plus loin (n° 219).

Remarque. — **206.** Quand on rabat un plan α sur un plan β parallèle à un plan de projection, on n'indique que la projection, sur ce dernier

plan, de la figure rabattue ; l'autre projection est toujours confondue avec la projection de même nom du plan sur lequel on rabat.

Relèvements. — **207.** Quand un plan CC'OA (fig. 167) a été rabattu sur un plan BB'OA, et que l'on connaît le rabattement d'une figure, on peut se proposer de chercher les projections de la figure, placée comme elle l'était avant le rabattement.

Il suffit pour cela, de remettre, dans leurs positions primitives, le plan rabattu ainsi que la figure rabattue ; c'est ce qu'on appelle *relever* le plan et la figure.

Relever le plan BB'OA dans sa position CC'OA n'est autre chose que rabattre le plan BB'OA sur le plan CC'OA, dans un sens inverse de celui dans lequel le plan CC'OA a été rabattu sur le plan BB'OA. De sorte que pour faire un relèvement, on suivra les indications du numéro 198, avec cette différence, que la charnière et le sens sont ici déjà connus par le rabattement du plan qu'on veut relever.

PROBLÈME XXVI.

208. *Rabattre un plan vertical ou debout sur un plan horizontal ou de front, et chercher le rabattement d'un point quelconque du premier plan.*

Supposons que le plan vertical α (fig. 169 et 170) doive être rabattu sur le plan horizontal ρ et que l'on veuille chercher le rabattement du point A (n° 198).

La charnière *ch* est l'intersection du plan α avec le plan ρ sur lequel on rabat.

Le sens du mouvement est indiqué par la flèche *f* dont on connaît la signification (n° 203).

Le point A n'est pas sur la charnière (n° 204).

Menons par le point A (n° 205) un plan μ perpendiculaire à la charnière, donc perpendiculaire au plan horizontal ; la projection horizontale du plan μ passe par A^h et est perpendiculaire à ch^h (n° 110). L'intersection du plan μ avec le plan horizontal ρ sur lequel on rabat

est la droite i. Le point C est le point de rencontre de i et de ch. La distance CA se projette verticalement en vraie grandeur, en A^vC^v, puisque la droite AC est perpendiculaire au plan horizontal. Pour porter la longueur AC sur i à partir de C, remarquons que i se trouve dans le plan horizontal ρ, ce qui permet de porter CA en vraie grandeur sur i^h, à partir de C^h. Cette distance devra d'ailleurs être portée dans le sens de la pointe de la flèche f, pour la figure 169, et dans le sens opposé pour la figure 170, puisque dans le premier cas, le point A est au-dessus du plan ρ et que dans le second cas, le point A est au-dessous du plan ρ.

Nous obtenons ainsi la projection A_r^h du point A rabattu en A_r, dans le plan ρ. La projection verticale A_r^v devrait se marquer sur ρ^v, si on voulait l'indiquer (n° 206).

Dans les figures 171, 172 et 173, le plan α a été rabattu sur le plan de front ρ.

Les figures 174 et 175, 176 et 177 représentent le rabattement du plan debout α respectivement sur un plan de front ρ et sur un plan horizontal ρ. Les notations expliquées en détail dans les épures 169 et 170, sont reproduites avec les mêmes significations sur les figures 171 à 177, ce qui permettra aux commençants de lire ces épures avec facilité.

Règles. — **209**. Nous pouvons déduire des constructions que nous avons faites, pour trouver la solution du problème qu'il s'agissait de résoudre dans le numéro précédent, des règles qui nous dispenseront de répéter les raisonnements indiqués au numéro 205.

I. *Quand on rabat un plan vertical ou debout α sur un plan horizontal, un point* A *du plan α se rabattra en un point* A_r *dont la projection horizontale devra être placée sur une perpendiculaire menée à la projection horizontale de la charnière* ch, *par la projection horizontale du point* A, *à une distance de* ch^h *marquée par la distance de la projection verticale du point* A *à la projection verticale de la charnière, et dans un sens déterminé par le sens du rabattement.*

II. *Quand on rabat un plan vertical ou debout α sur un plan de front, un point* A *du plan α se rabattra en un point* A_r, *dont la*

projection verticale devra être placée sur une perpendiculaire menée à la projection verticale de la charnière ch, *par la projection verticale du point* A, *à une distance de* ch^v *marquée par la distance de la projection horizontale du point* A *à la projection horizontale de la charnière, et dans un sens déterminé par le sens du rabattement.*

PROBLÈME XXVII.

210. *Un plan vertical ou debout a été rabattu sur un plan horizontal ou de front, on demande de le relever et de chercher les projections d'un point quelconque dont on connaît le rabattement* (n° 207).

Supposons que le plan vertical α (fig. 169 et 170) ait été rabattu sur le plan horizontal ρ autour de la chanière *ch* et dans le sens marqué par la flèche *f*. Soit A_r^h la projection horizontale du rabattement A_r d'un point A du plan α (n° 206).

Le point A_r n'est pas sur la charnière (n° 204).

Menons par le point A_r un plan μ perpendiculaire à la charnière (n° 205), donc perpendiculaire au plan horizontal : la projection horizontale du plan μ passe par A_r^h et est perpendiculaire à ch^h (n° 110). L'intersection du plan μ avec le plan α sur lequel on relève est la droite i'. Le point C est le point de rencontre de i' et de *ch*. La distance CA_r placée dans le plan horizontal ρ, se projette horizontalement en vraie grandeur en $C^hA_r^h$. Pour porter la longueur CA_r sur i', à partir de C, remarquons que i' est parallèle au plan vertical, ce qui permet de porter CA_r en vraie grandeur sur i'^v, à partir de C^v. Cette distance devra d'ailleurs être portée au-dessus du plan ρ pour la figure 169, et au-dessous pour la figure 170, car dans le premier cas, le point A est rabattu dans le sens de la pointe de la flèche *f*, et dans le second cas, le point A est rabattu du côté opposé.

Nous obtenons ainsi la projection verticale A^v du point A_r relevé en A dans le plan α, et la projection A^h nécessairement confondue avec i'^h.

Dans les figures 171 à 177, le plan α a été rabattu comme il a été dit au numéro 208; les notations expliquées en détail dans les figures 169 et 170, sont reproduites avec les mêmes significations,

sur les figures 171 à 177, ce qui permettra aux commençants de lire ces épures avec facilité.

Règles. — **211.** Des constructions que nous avons faites pour résoudre le problème précédent, nous pouvons conclure des règles très simples.

I. *Quand un plan vertical ou debout a été rabattu sur un plan horizontal, un point* A_r *rabattu se relève en un point* A *dont la projection horizontale doit être placée sur une perpendiculaire menée à la projection horizontale de la charnière* ch, *par la projection horizontale du point* A_r. *La projection verticale* A^v *sera distante de* ch^v *d'une longueur égale à la distance de* A_r^h *à* ch^h, *et sera placée au-dessus ou au-dessous du plan* ρ *suivant le sens du rabattement.*

II. *Quand un plan vertical ou debout a été rabattu sur un plan de front, un point* A_r *rabattu se relève en un point* A *dont la projection verticale devra être placée sur une perpendiculaire menée à la projection verticale de la charnière* ch *par la projection verticale du point* A_r. *La projection horizontale* A^h *sera distante de* ch^h *d'une longueur égale à la distance de* A_r^v *à* ch^v, *et sera placée en avant ou en arrière du plan* ρ *suivant le sens du rabattement.*

Remarque. — **212.** Quand la charnière est perpendiculaire à un plan de projection, le plan du mouvement d'un point A est parallèle à ce plan de projection, et l'arc de cercle décrit par le point, se projette sur ce dernier plan suivant un arc de cercle égal (fig. 171, 172, 173, 176 et 177). Cette projection de l'arc de cercle est inutile, mais elle indique aux commençants qu'on porte la longueur du rayon sur l'intersection du plan du mouvement avec le plan sur lequel on rabat ou sur lequel on relève, et nous l'avons dessinée dans les exemples précédents.

APPLICATION XVI.

213. *Déterminer la distance de deux points.*

Si la droite, qui unit les deux points, était parallèle à un plan de projection, nous savons que la distance demandée se projetterait

sur ce plan, suivant une distance égale. Dans tout autre cas, nous pourrons rabattre sur un plan parallèle à un plan de projection, l'un des plans projetant la distance demandée et chercher les rabattements des points donnés. Ce qu'il y aura de plus simple, ce sera d'effectuer le rabattement sur un plan mené par un des points parallèlement à un plan de projection, attendu qu'alors, le point choisi appartiendra à la charnière (n° 204).

Dans la figure 178, nous avons rabattu le plan projetant horizontalement la distance AB à déterminer, sur un plan horizontal ρ mené par le point A. Le point A est immobile, le point B se rabat en B_r et la distance AB se projette, après rabattement, suivant la distance égale $A^h B_r^h$.

214. De la construction que nous avons faite pour trouver la distance de deux points, on peut déduire une règle très simple qui sera encore justifiée plus loin (n° 284) et que l'on pourrait, du reste, aisément justifier sans se servir de la figure 159.

Règle. — *La distance de deux points* A *et* B, *est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est la distance entre les parallèles à la ligne de terre menées par les projections des points* A *et* B *sur l'un des plans de projection, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la distance entre les projections des deux points sur l'autre plan de projection.*

L'application de cette règle simplifie l'épure du n° 213. Ainsi (fig. 179), XB^v est la distance entre les parallèles menées par les projections verticales des points A et B à la ligne de terre ; XY est égal à la distance entre les projections horizontales de ces points et YB^v est la distance entre les points A et B.

APPLICATION XVII.

215. *Porter sur une droite* d, *à partir d'un point* A *pris sur cette droite, une longueur donnée* l.

On pourra rabattre sur un plan parallèle à un plan de projection,

l'un des plans projetant la droite *d* et chercher les rabattements de la droite *d* et du point A. On portera ensuite sur la droite rabattue, la longueur *l* et on en relèvera l'extrémité.

Dans la figure 181, nous avons rabattu, sur le plan horizontal ρ, le plan projetant horizontalement la droite ; le rabattement de la droite *d* a été déterminé au moyen du point X situé sur la charnière et du rabattement du point A. L'extrémité de la longueur *l*, portée sur $A_r X$, est en B_r ; le point B_r relevé, doit avoir comme vérification, ses deux projections sur les projections de mêmes noms de la droite *d*.

216. La construction que nous avons faite pour résoudre l'application précédente, montre, ce qui est aisé à justifier directement, que les longueurs AX et AB prises sur une droite, sont proportionnelles à leurs projections sur un plan.

On peut conclure de cette remarque, une règle très simple pour résoudre l'application du numéro précédent.

Règle. — *Pour porter sur une droite* d *à partir d'un point* A *de cette droite, une longueur* AB, *on prend un second point* X *sur* d, *on cherche la distance* AX (n° 214) *au moyen d'un triangle rectangle, puis on proportionne les longueurs* AX *et* AB *à leurs projections.*

L'emploi de cette règle permet de simplifier la figure 181 en faisant usage des constructions existantes sur l'épure. Ainsi, soient (fig. 183) *d* la droite et A le point donnés. Construisons en YX^v la distance AX et portons, de Y en Z, sur YX^v, à partir de Y, la distance AB. En menant par Z une parallèle à la ligne de terre, nous aurons en A^vB^v, la projection verticale de la distance AB, et par une perpendiculaire à la ligne de terre, nous connaîtrons la projection horizontale de B.

Supposons que l'on veuille porter sur la droite de profil AB (fig. 182) une longueur donnée, à partir du point A et dans le sens AB. Construisons en A^vX la distance AB et portons sur A^vX, à partir de A^v et dans le sens A^vX la longueur donnée A^vY. Cette longueur aura A^vC^v pour projection verticale et C^vY pour projection horizontale, de sorte que le point C sera connu par ses deux projections, en portant la longueur C^vY à partir de A^h vers B^h, en A^hC^h.

Remarque. — La distance peut être portée sur *d* dans deux sens opposés et il en résulte pour le problème deux solutions que les commençants indiqueront facilement.

PROBLÈME XXVIII.

217. *Rabattre un plan quelconque sur un plan ρ parallèle à un plan de projection, et déterminer le rabattement d'un point quelconque du plan.*

Supposons que le plan (*1*, A) (fig. 180) donné par l'horizontale *1* et le point A, doive être rabattu sur le plan horizontal ρ de la droite *1*, et qu'on veuille chercher le rabattement du point A (n° 198).

La charnière *ch*, intersection du plan (*1*, A) avec le plan ρ sur lequel on rabat, n'est autre que la droite *1*.

Le sens du mouvement est indiqué par la flèche *f* dont on connaît la signification (n° 203). Le point A n'est pas sur la charnière (n° 204). Menons par le point A (n° 205) un plan μ perpendiculaire à la charnière, donc perpendiculaire au plan horizontal ; la projection horizontale du plan μ passe par A^h et est perpendiculaire à ch^h. L'intersection du plan μ avec le plan horizontal ρ sur lequel on rabat est la droite *i*. Le point C est le point de rencontre de *i* et de *ch*. La distance du point C au point A est construite en A^vX (n° 214). Comme la droite *i* est dans un plan horizontal et que le point A est au-dessus du plan ρ, on doit porter la longueur CA sur i^h, à partir de C^h, dans le sens de la pointe de la flèche *f* en $C^hA^h_r$.

Nous obtenons ainsi la projection A^h_r du point A rabattu dans le plan ρ. La projection A^v_r devrait se marquer sur ρ^v si on voulait l'indiquer (n° 206).

Dans la figure 184, le plan (*1*, *2*) a été rabattu sur le plan ρ parallèle au plan horizontal, et l'on a cherché le rabattement A_r du point A de la droite *2*. Le rabattement 2_r de la droite *2* est déterminé par le point M de la charnière, et par le point A_r. Du reste, les notations employées dans la figure 180 que nous avons expliquée en détail, sont reproduites avec les mêmes significations dans l'épure 184, ce qui permettra aux commençants de lire cette épure avec facilité.

PROBLÈME XXIX.

218. *Un plan quelconque a été rabattu sur un plan parallèle à un plan de projection; on demande de le relever* (n° 207), *et de chercher les projections d'un point* A *dont on connait le rabattement* A_r.

Supposons que le plan (*1*, *2*) (fig. 185) ait été rabattu sur le plan de front ρ, autour de la charnière *ch* et dans le sens marqué par la flèche *f*. Soit A_r^v la projection verticale du point A_r, rabattement d'un point A du plan (*1*, 2).

Le point A_r n'est pas sur la charnière (n° 204). Menons par le point A_r (n° 205) un plan μ perpendiculaire à la charnière, donc perpendiculaire au plan vertical; la projection verticale du plan μ passe par A_r^v et est perpendiculaire à ch^v. L'intersection du plan du mouvement μ avec le plan (*1*, *2*) sur lequel se fait le relèvement, est la droite *i*. Le point C est le point de rencontre de *i* avec *ch*. Sur la droite *i*, à partir de C, nous devons porter la longueur du rayon. La distance du point C au point A_r se projette verticalement en vraie grandeur, en $C^vA_r^v$, puisque la droite CA_r est située dans un plan de front. Pour porter la longueur CA_r sur *i*, nous avons (n° *2*16) construit, en C^vX, la distance CB et nous avons porté sur C^vX, à partir de C^v, une distance C^vY égale à CA_r, de façon à obtenir un point A situé en arrière de ρ, puisque A_r est placé du côté des barbes de la flèche *f*.

Dans les figures 186 et 187, on a supposé que le plan (*1*, *2*) a été rabattu sur un plan ρ de front. Du reste, les notations employées dans la figure 185, que nous avons expliquée en détail, sont reproduites, avec les mêmes significations, dans les épures 186 et 187, ce qui permettra aux commençants de lire ces épures avec facilité.

Remarque importante. — 219. Quand on a déterminé le rabattement A_r d'un point A quelconque d'un plan et que l'on veut trouver les rabattements de différents autres points d'une figure située dans ce plan, il ne sera pas nécessaire de recommencer, pour chacun de

ces derniers points, les raisonnements et les tracés que nous avons faits au numéro 217 pour le rabattement du point A.

Considérons en effet différentes droites auxiliaires parallèles entre elles, passant par le point A et par les autres points à rabattre. Choisissons ces droites auxiliaires de façon que leurs points de rencontre avec la charnière se trouvent dans les limites de l'épure. Le rabattement de la droite passant par A sera immédiatement connu par le point situé sur la charnière et par A_r ; les rabattements des autres droites auxiliaires seront déterminés par leurs points de rencontre avec la charnière et par leur direction, qui est celle du rabattement de la droite menée par A ; enfin le rabattement de chacun des points sera déterminé sur le rabattement de la droite auxiliaire correspondante, par la simple considération du plan du mouvement, sans que l'on ait à s'occuper du centre et du rayon de l'arc décrit par le point qui tourne.

Cette remarque qui s'applique aussi aux relèvements (nº 207), permet de simplifier considérablement la détermination du rabattement ou du relèvement d'une figure plane.

Supposons par exemple, que l'on veuille trouver le rabattement sur le plan horizontal ρ, de la section droite faite dans le prisme de la figure 163 (nº 190), au moyen du plan (*1*, *2*) mené, par A', perpendiculairement aux arêtes de ce prisme.

Nous avons reproduit, dans la figure 188, le plan (*1*, *2*) et la section plane A'B'C'D'E' et c'est dans cette figure que nous avons fait le rabattement.

Le sommet E' est rabattu en un point E'_r déterminé au moyen du rayon E'X de l'arc décrit par E'. Or, si nous imaginons par E', une droite quelconque rencontrant la charnière, par exemple, la droite E'A', cette droite sera rabattue en $A'E'_r$; dès lors, menons par les sommets B',C',D', des parallèles à E'A' (les projections horizontales suffisent), les rabattements de ces parallèles seront connus et l'on connaîtra aussi immédiatement les rabattements des sommets B', C' et D', par la simple considération du plan du mouvement de chacun de ces points.

On observera que le côté B'C' rencontre la charnière en un

point I situé dans les limites de l'épure : ce point appartient au rabattement de B'C' (n° 204).

EXERCICE XXIX. — **220.** Trouver les rabattements, sur un plan parallèle à un plan de projection, des sections planes obtenues dans les exemples des numéros 159 et 171 à 176.

§ 3. ROTATIONS.

Règle générale — **221.** Dans tout mouvement de rotation d'une figure (n° 193), il faut :
1° *Choisir l'axe;*
2° *Déterminer le sens et l'amplitude de la rotation;*
3° *Marquer sur la figure que l'on fait tourner, les points qui dans les limites du dessin se trouvent sur l'axe*;
4° *Chercher les positions nouvelles des points qui n'appartiennent pas à l'axe.*

Axe. — **222.** On prend toujours, quand on le peut, l'axe perpendiculaire à un plan de projection, parce qu'alors les cercles décrits par les points qui tournent autour de l'axe, ont des projections simples et qu'on suit facilement ces points dans leur mouvement.

Sens et Amplitude. — **223.** Quand on fait tourner une figure dans un sens déterminé, autour d'un axe, l'*amplitude* de la rotation est l'angle dont un point quelconque tourne autour de l'axe. L'amplitude doit nécessairement varier de 0° à 360°, si l'on veut considérer la figure dans toutes les positions qu'elle peut occuper autour de l'axe. On pourrait du reste, convenir d'un sens unique pour les rotations à faire en géométrie descriptive, afin de ne pas devoir indiquer ce sens sur les épures.

Mais il est à remarquer que si l'on imprime à une figure, dans un sens déterminé, une rotation dont l'amplitude α est comprise entre 180° et 360°, le résultat est le même que si l'on imprimait à la figure, dans un sens inverse, une rotation dont l'amplitude $360° - \alpha$ serait plus petite que 180°.

Donc, en s'imposant le soin d'indiquer dans chaque rotation, le sens de cette rotation, on pourra ne considérer pour l'amplitude, que des angles compris entre 0° et 180°. C'est ainsi que nous agirons toujours.

Le sens dans lequel se fait la rotation, se marque en géométrie descriptive, par une flèche courbe tracée autour du point de rencontre de l'axe avec un plan perpendiculaire à cet axe. Quand l'axe est perpendiculaire à un plan de projection, la flèche courbe se trace toujours autour de la projection de l'axe sur ce plan.

L'amplitude de la rotation, toujours plus petite que 180°, se donne a priori, en degrés ou autrement; ou bien a posteriori, en fixant la position particulière que devra occuper la figure après la rotation.

Points sur l'axe. — 224. Ces points restent immobiles pendant le mouvement, et appartiennent aussi à la figure après la rotation.

Points situés hors de l'axe. — 225. Nous avons déjà dit (n° 193) que dans un mouvement de rotation, un point non situé sur l'axe, décrit dans un plan perpendiculaire à l'axe, appelé plan du mouvement, un arc de cercle dont le centre est l'intersection de ce plan avec l'axe et dont le rayon est la distance du centre au point qui tourne; le sens et l'amplitude de la rotation permettront de fixer sur cet arc de cercle, la position du point après la rotation.

PROBLÈME XXX.

226. *Faire tourner un point, d'un angle donné et dans un sens donné, autour d'un axe perpendiculaire à un plan de projection.*

Soient *a* (fig. 189) un axe vertical, A le point à faire tourner dans le sens marqué par la flèche et φ l'amplitude du mouvement.

Le point A, en tournant, décrit un arc de cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe, donc parallèle au plan horizontal. Cet arc se projette verticalement suivant une parallèle à la ligne de terre passant par A^v, et horizontalement suivant un arc égal, dont le centre

est la projection horizontale de l'axe et dont le rayon est la distance de cette projection à la projection horizontale A^h du point qui tourne. Lorsque le point A s'est déplacé d'un angle φ, sa projection horizontale a tourné aussi d'un angle φ et s'est placée en A_1^h, eu égard au sens du mouvement; sa projection verticale nouvelle se trouve en A_1^v, sur une perpendiculaire à la ligne de terre passant par A_1^h, et sur la projection verticale $A^vA_1^v$ de l'arc de cercle décrit.

On fera tourner de même de l'angle φ les points B, C, D,...; les longueurs mesurées entre les côtés de l'angle $A^h a^h A_1^h$, sur les projections horizontales des arcs décrits par ces nouveaux points, sont celles qu'il faudra porter sur ces arcs dans le sens de la flèche et à partir des projections horizontales des points B, C,... pour avoir les nouvelles projections horizontales de ces points; les nouvelles projections verticales s'obtiendront comme pour le point A.

On s'exercera, de même, à faire tourner des points autour d'un axe debout.

PROBLÈME XXXI.

227. *Faire tourner une droite, d'un angle donné et dans un sens donné, autour d'un axe perpendiculaire à un plan de projection.*

Supposons l'axe a perpendiculaire au plan horizontal.

1° Si la droite donnée est parallèle à l'axe, elle lui restera parallèle dans le mouvement de rotation, et il suffira d'en faire tourner la projection horizontale.

2° Si la droite donnée d (fig. 190) rencontre l'axe en un point I, situé dans les limites de l'épure, ce point restera immobile dans la rotation, et il suffira de faire tourner un point A de l'angle donné φ, pour avoir la droite dans sa nouvelle position d_1.

3° Si la droite d n'est pas dans un même plan avec l'axe, on peut faire tourner deux points A et B (fig. 191) de l'amplitude φ.

Pour plus de simplicité dans les tracés, on pourra choisir les points A et B (fig. 192) de manière que les projections horizontales des circonférences décrites soient confondues.

Parfois, parmi les points que l'on fait tourner, on choisit (fig. 193)

l'extrémité X de la plus courte distance de la droite d à l'axe. Remarquons que la plus courte distance entre a et d est parallèle au plan horizontal, qu'elle se projette horizontalement suivant une droite $a^h X^h$ perpendiculaire à d^h (n° 76) et verticalement, suivant une droite menée par X^v parallèlement à la ligne de terre. Le point X, intersection de la plus courte distance avec la droite d, décrit une circonférence à la projection horizontale de laquelle la droite d^h doit rester tangente, puisque d doit rester, dans la rotation, à la même distance de l'axe a. La nouvelle position X_1 du point X, détermine donc la projection horizontale d_1^h de la droite d dans sa nouvelle position d_1, et un point X_1^v de la nouvelle projection verticale. Pour avoir un second point de cette dernière projection, il suffit de faire tourner un second point A de d; mais on ne devra plus pour ce point, mesurer l'amplitude du mouvement, puisque A doit aller se placer en A_1 sur la droite d_1, à droite du point X_1 pour un observateur placé sur l'axe et qui *voit* le mouvement s'effectuer de gauche à droite.

4° Supposons (fig. 194) la droite d perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire parallèle au plan horizontal. Pendant le mouvement de rotation, elle restera perpendiculaire à l'axe et se déplacera dans le plan horizontal qui la contient. Sa projection verticale ne changera donc pas et sa projection horizontale nouvelle sera déterminée, par les positions nouvelles A_1 et B_1 de deux points A et B.

Remarque. — On s'exercera de même, à faire tourner une droite autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical de projection.

Cas où l'on donne arbitrairement la direction nouvelle d'une projection d'une droite donnée. — **228**. Quand on fait tourner une droite dans un sens donné, autour d'un axe, on peut se donner arbitrairement, sur un plan perpendiculaire à l'axe, la direction de la projection nouvelle de la droite. L'amplitude de la rotation sera l'un des angles supplémentaires formés par la projection ancienne de la droite avec la direction de la projection nouvelle (n° 223); le sens de la rotation sera déterminé par le choix de l'angle fixant l'amplitude (n° 230 à 232).

PROBLÈME XXXII.

229. *Faire tourner un plan, d'un angle donné et dans un sens donné, autour d'un axe perpendiculaire à un plan de projection.*

Supposons l'axe a perpendiculaire au plan vertical.

1° Si (fig. 195) le plan α est parallèle à l'axe, il restera parallèle à l'axe dans le mouvement de rotation et il suffira, pour le déplacer d'un angle φ dans le sens de la flèche, d'en faire tourner la projection horizontale, de l'angle φ, autour du pied de l'axe.

2° Si le plan (fig. 196) était déterminé par un point A situé sur l'axe a et par une droite d, il suffirait de faire tourner cette droite de d en d_1 autour de l'axe, de l'angle donné φ. Le plan Ad_1 sera le plan Ad dans sa nouvelle position.

3° Si l'on n'a pas dans le plan donné, le point sur l'axe, soit parce que ses projections sont hors des limites de l'épure, soit parce qu'on ne veut pas faire les constructions pour le déterminer, alors on fera tourner autour de l'axe, d'une amplitude φ, trois points du plan. Pour simplifier l'épure, on pourra choisir les points de façon que dans la rotation, ils décrivent des circonférences ayant mêmes projections sur un plan perpendiculaire à l'axe.

Supposons par exemple (fig. 197), un plan donné par la droite de profil AB et par le point C. Faisons tourner le point A de l'amplitude φ, autour de l'axe a et prenons, sur la droite BC du plan ABC, les points F et D que nous ferons tourner autour de a de la même amplitude ψ. Les points A_1, D_1 et F_1, détermineront le plan ABC dans sa nouvelle position.

Dans la figure 198, le plan est donné par les droites *1* et *2*; on a fait tourner les points A et B de la droite *1* et le point C de la droite *2*.

Dans la figure 199, le plan (*1*, *2*) contient une droite de front et une horizontale; nous avons fait tourner le point A de l'horizontale et les points B et C de la droite de front (n° 227, 4°). Le plan (A_1, 1_1) est le plan (*1*, *2*) dans sa nouvelle position.

Remarque. — On s'exercera à faire tourner un plan donné, autour d'un axe perpendiculaire au plan horizontal.

APPLICATION XVIII.

230. *Amener une droite à être parallèle à un plan de projection.*

Si nous voulons (fig. 200) amener la droite x à être parallèle au plan horizontal, il faudra que la projection verticale de la droite soit, après la rotation, parallèle à la ligne de terre, et par conséquent, que l'axe a soit debout (n° 228). L'amplitude de la rotation doit être l'un des angles supplémentaires que fait x^v avec la direction de la ligne de terre. Choisissons l'angle φ, nous connaissons dès lors le sens du mouvement et il ne reste plus qu'à faire tourner, dans ce sens, deux points tels que A et B.

On trace les projections des circonférences décrites par ces points, et pour prendre sur ces circonférences, à partir des points A et B, des arcs correspondant à l'angle φ, on remarquera que ces arcs sont égaux à ceux tracés entre les deux côtés de l'angle φ, du sommet pris comme centre et avec les mêmes rayons. On obtient ainsi les points A_1 et B_1 qui déterminent la droite x'.

Si l'on est libre de choisir l'axe a, on le fera passer par un point de la droite x (fig. 201); il suffira alors de faire tourner un seul point tel que A.

On s'exercera de même à amener une droite parallèlement au plan vertical; il faudra la faire tourner autour d'un axe vertical.

APPLICATION XIX.

231. *Étant donnée une droite parallèle à un plan de projection, l'amener perpendiculairement à l'autre plan de projection.*

La droite x (fig. 202), parallèle au plan vertical, pourra être amenée perpendiculairement au plan horizontal, en la faisant tourner autour de l'axe debout (n° 227).

Le sens de la rotation sera déterminé par l'angle φ choisi pour l'amplitude. Le point A ira occuper la position A_1, et la projection

verticale de la droite ira se placer en $1'^{v}$; la projection horizontale $1'^{h}$ sera nécessairement un point placé sur A_1^h.

Quand on aura le choix de l'axe, on prendra, pour plus de facilité, un axe passant par un point de la droite.

APPLICATION XX.

232. *Amener une droite quelconque à être perpendiculaire à un plan de projection.*

Une droite, perpendiculaire à un plan de projection, étant parallèle à l'autre, il suffira d'imprimer successivement à la droite quelconque donnée, les rotations définies dans les deux applications précédentes.

Dans la figure 203, la droite 1 a été amenée d'abord à être de front, dans la position $1'$; puis, elle a été amenée à être perpendiculaire au plan horizontal, dans la position $1''$.

On s'exercera de même, à amener une droite à être perpendiculaire au plan vertical.

APPLICATION XXI.

233. *Amener un plan à être vertical ou debout.*

Si nous voulons amener un plan à être vertical par exemple, il suffit qu'une génératrice de front soit amenée perpendiculairement au plan horizontal (n° 230).

Ainsi, soit (fig. 204) le plan $(1, 2)$ donné par une horizontale et une droite de front. Prenons un axe a perpendiculaire au plan vertical et puisque la droite 2 est une droite de front, faisons-la tourner autour de a jusqu'à ce qu'elle soit en 2_1, perpendiculaire au plan horizontal. Nous connaissons ainsi le sens et l'amplitude φ du mouvement de rotation, et il suffira de déterminer au moyen d'une génératrice telle que g, le point I où l'axe perce le plan $(1, 2)$, point qui reste immobile, ou de faire tourner un point A, de l'amplitude φ, pour achever de déterminer le plan, après la rotation, dans sa nouvelle position α_1.

Dans la figure 205, nous avons dû déterminer dans le plan (*1, 2*), une droite de front g que nous avons amenée en g_1, perpendiculairement au plan horizontal. Puis nous avons fait tourner un point A de la droite *2*, pour obtenir le plan (*1, 2*) dans sa nouvelle position α_1.

Quand on pourra choisir l'axe a, on le fera passer par un point connu du plan. Dans la figure 206, l'axe a passe par le point A du plan (*1, 2*) : on a fait tourner la droite de front 2 et un point B, de manière à placer le plan (*1, 2*) dans la position α_1 où il est vertical.

On s'appliquera de même à amener un plan à être debout.

APPLICATION XXII.

234. *Étant donné un plan perpendiculaire à un plan de projection, l'amener à être parallèle à l'autre plan de projection.*

Pour amener par exemple (fig. 207), le plan debout α à être horizontal, il suffira de le faire tourner, de α en α_1, autour d'un axe debout a (n° 229, 1°).

Quand on aura le choix de l'axe, on le prendra, pour plus de facilité, dans le plan donné.

APPLICATION XXIII.

235. *Amener un plan quelconque à être parallèle à un plan de projection.*

Comme un plan, parallèle à un plan de projection, est perpendiculaire à l'autre, il suffira d'imprimer successivement au plan quelconque donné, les rotations définies dans les deux applications précédentes.

Ainsi, soit un plan (d,d') (fig. 207) à amener parallèlement au plan vertical. En le faisant tourner, autour de l'axe debout a, de l'angle φ, nous avons amené la génératrice de front g dans la position g', et le plan dans la position du plan vertical α_1. Le plan α_1 a été placé dans la position du plan de front α_2 par une rotation d'amplitude ψ autour de l'axe vertical a'.

On s'appliquera de même à amener un plan à être horizontal.

§ 4. CHANGEMENT DES PLANS DE PROJECTION.

Conventions. — **236.** Nous avons déjà vu (n° 196) en quoi consiste le changement des plans de projection. Si, en conservant la projection horizontale, nous voulons déterminer la projection d'une figure sur un plan vertical autre que le plan V primitivement choisi, nous désignerons le nouveau plan vertical par la lettre V′; la projection nouvelle de la figure sur ce plan V′ sera appelée *projection verticale nouvelle*, ou *projection verticale dans le système* HV′ ou *projection* V′; nous affecterons, de l'exposant *v′*, le signe désignant un point, ou une droite, ou un plan α perpendiculaire au plan V′, pour désigner la projection V′ du point, de la droite ou du plan α (n° 9); tout plan parallèle au plan V′, ou perpendiculaire au plan V′, ou perpendiculaire à l'intersection (H, V′) sera encore appelé *plan de front*, ou *plan debout*, ou *plan de profil*; enfin toute droite parallèle ou perpendiculaire au plan V′ sera encore appelée *frontale* ou *droite debout* (nos 8 et 64).

Si, en conservant la projection verticale, nous voulons déterminer la projection d'une figure sur un plan debout, autre que le plan H primitivement choisi, nous désignerons le nouveau plan horizontal par la lettre H′; la projection nouvelle de la figure sur ce plan H′ sera appelée *projection horizontale nouvelle*, ou *projection horizontale dans le système* H′V ou *projection* H′; nous affecterons, de l'exposant *h′*, le signe désignant un point, ou une droite, ou un plan α perpendiculaire au plan H′, pour désigner la projection H′ du point, de la droite ou du plan α (n° 9); tout plan parallèle au plan H′ ou perpendiculaire au plan H′ ou perpendiculaire à l'intersection (H′, V) sera encore appelé *plan horizontal*, ou *plan vertical*, ou *plan de profil*; enfin, toute droite parallèle ou perpendiculaire au plan H′ sera encore appelée *horizontale* ou *verticale* (nos 8 et 64).

Du système HV′, on passera au système V′H′, puis aux systèmes H′V″, V″H″, etc., en faisant des conventions analogues. De même, on passera du système VH′ aux systèmes H′V′, V′H″, etc..

Du reste, toutes les conventions que nous avons faites aux

numéros 16, 34, 40, 41, 45, 51, 141 à 144 et 147, pour la représentation des figures sur les plans de projection H et V, seront appliquées pour la représentation des figures dans tout autre système de plans de projection.

Nous remarquerons encore, comme au numéro 39, que dans un système quelconque de plans de projection, aussi bien que dans le système HV, la direction de la ligne de terre, et non sa position absolue, importe seule dans les épures.

Enfin, dès qu'il y aura dans une épure, un changement de plan de projection, nous aurons soin (n° 16) d'indiquer sur le dessin, d'une façon très visible, les lettres désignant les plans de projection dans chaque système employé, sans tenir compte de la convention faite au numéro 42, pour le cas où l'on n'emploie que le système des plans de projection H et V.

Méthode générale. — **237**. Dans tout changement de plan de projection, il faudra :
1° Désigner le plan de projection que l'on veut abandonner;
2° Déterminer la direction de la nouvelle ligne de terre;
3° Prendre un plan de repère parallèle au plan de projection que l'on conserve; en indiquer l'ancienne projection sur le plan que l'on abandonne, et la nouvelle projection sur le nouveau plan que l'on adopte;
4° Inscrire de part et d'autre de la projection ancienne et de la projection nouvelle du plan de repère, les lettres indiquant les plans de projection;
5° Marquer s'il y a lieu, sur la figure dont on cherche la projection nouvelle, les points situés dans le plan de repère et en indiquer les nouvelles projections;
6° Chercher les nouvelles projections des points de la figure, autres que ceux qui appartiennent au plan de repère.

Plan de projection à abandonner. — **238**. Ce plan est laissé au choix du dessinateur, ou bien il est imposé par la nature de la question.

Direction de la nouvelle ligne de terre. — **239**. Cette direction sera donnée a priori, par une droite tracée dans le plan de l'épure, ou a posteriori, par la position que doit occuper la figure dans le nouveau système de plans de projection.

Plan de repère. — 240. Nous verrons (n° 244) que le plan de repère est indispensable à la détermination des projections nouvelles des points de la figure.

Lettres désignant les plans de projection. — 241. Leur nécessité a été expliquée en détail dans les numéros 32 et 38.

Points dans le plan de repère. — 242. Les projections nouvelles de ces points doivent se trouver sur la projection nouvelle du plan de repère, et seront très faciles à déterminer. Il est cependant à remarquer que si ces points ne sont pas immédiatement connus dans l'épure, l'avantage de leur emploi pourrait disparaître, par suite des tracés que l'on devrait faire pour les déterminer : dans ce cas, on n'y aura point égard.

Projections nouvelles de différents points de la figure. — 243. Les problèmes qui suivent nous apprendront à représenter un point, une droite, un plan et, en général, une figure quelconque, sur les plans que l'on substitue au plan horizontal H et au plan vertical V, formant le système primitif des plans de projection.

PROBLÈME XXXIII.

244. *Un point* A *quelconque étant représenté dans le système* HV, *on demande de le représenter dans un système* H'V'.

Supposons (fig. 209) que nous abandonnions le plan V pour prendre un nouveau plan V' perpendiculaire à H (n° 237).

Soient $\rho^{v'}$ la direction de la nouvelle ligne de terre, ρ le plan de repère parallèle au plan H conservé, ρ^{v} la projection du plan ρ sur le plan vertical V que l'on abandonne, $\rho^{v'}$ la projection du plan ρ sur le plan vertical V' nouveau, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H et V' les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau.

La projection horizontale du point A est conservée et la nouvelle projection verticale $A^{v'}$ se trouve sur une perpendiculaire menée par A^{h} à la nouvelle ligne de terre, à une distance de $\rho^{v'}$ égale

à la distance du point A au plan ρ (nº 12), c'est-à-dire égale à la distance de A^v à ρ^v. La projection $A^{v'}$ se trouvera du reste du côté V', car A^v se trouvant du côté V, le point A est au-dessus de ρ. De même, la projection $A^{v'}$ se trouverait du côté H dans le système HV', si A^v se trouvait du côté H, dans le système HV.

Supposons maintenant que nous abandonnions le plan H pour prendre un nouveau plan de projection H' perpendiculaire à V' (nº 237). Soient $\sigma^{h'}$ la direction de la nouvelle ligne de terre, σ le nouveau plan de repère parallèle au plan V' conservé, σ^h la projection du plan σ sur le plan H que l'on abandonne, $\sigma^{h'}$ la projection du plan σ sur le plan H' nouveau, H' et V' les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau.

La projection verticale $A^{v'}$ du point A est conservée et la nouvelle projection horizontale $A^{h'}$ se trouve sur une perpendiculaire menée par $A^{v'}$ à la nouvelle ligne de terre, à une distance de $\sigma^{h'}$ égale à la distance du point A au plan σ (nº 12), c'est-à-dire égale à la distance de A^h à σ^h. La projection $A^{h'}$ se trouvera du reste du côté V', car A^h se trouvant du côté V', le point A est en arrière de σ. De même, la projection $A^{h'}$ se trouverait du côté H', dans le système H'V', si A^h se trouvait du côté H, dans le système HV'.

On s'exercera à résoudre le même problème, mais en abandonnant le plan horizontal d'abord.

PROBLÈME XXXIV.

245. *Une droite étant représentée dans le système* HV, *on demande de la représenter dans un système* H'V'.

Il suffira de chercher les projections nouvelles de deux points de la droite donnée.

Soit (fig. 210) *d* la droite donnée et supposons qu'on abandonne d'abord le plan vertical V, pour le remplacer par un autre V', perpendiculaire à H.

Soient $\rho^{v'}$ la direction de la nouvelle ligne de terre, ρ le plan de repère parallèle au plan H conservé, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H et V' les lettres

désignant les plans de projection dans le système nouveau. Les points A et B auront pour nouvelles projections $A^{v'}$ et $B^{v'}$ (nº 244); le point A est le point où la droite *d* rencontre le plan de repère (nº 242).

Combinons maintenant le plan V′ avec un nouveau plan H′. Soient $\sigma^{h'}$ la direction de la nouvelle ligne de terre, σ le plan de repère parallèle au plan V′ conservé, H′ et V′ les lettres désignant les plans de projection dans le nouveau système. Les projections $A^{v'}$ et $B^{v'}$ seront conservées et l'on en déduira les nouvelles projections sur le plan H′. Nous aurions pu remplacer l'un des points A et B par le point C, situé sur la droite *d* et dans le plan de repère σ.

On s'exercera à résoudre le même problème, mais en abandonnant le plan horizontal d'abord.

PROBLÈME XXXV.

246. *Un plan étant représenté dans le système* HV, *on demande de le représenter dans un système* H′V′.

Il suffira de chercher les projections nouvelles de trois points du plan. On aura soin de prendre deux de ces points dans le plan de repère, s'il en résulte quelqu'avantage dans le dessin.

Soit (fig. 211) un plan (*1, 2*) et supposons qu'on abandonne d'abord le plan vertical V, pour prendre un nouveau plan V′ perpendiculaire à H. Le plan V′ est un plan de profil dans le système HV. Soient $\rho^{v'}$ la direction de la nouvelle ligne de terre, ρ le plan de repère parallèle au plan H conservé, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H et V′ les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau.

Nous avons pris, dans le plan (*1, 2*), les points A et B situés dans le plan de repère et avons obtenu ainsi une droite *3*, dont la projection V′ est confondue avec $\rho^{v'}$; puis, nous avons encore cherché la projection nouvelle du point C. Le plan donné est, dans le système HV′, le plan (C, *3*).

Combinons maintenant le plan V′ avec un nouveau plan H′. Soient $\sigma^{h'}$ la direction de la nouvelle ligne de terre, σ le plan de

repère parallèle au plan V′ conservé, H′ et V′ les lettres désignant les plans de projection dans le nouveau système.

Dans le plan (C, *3*), nous avons pris deux points appartenant au plan de repère σ et déterminant la droite *4* dont la nouvelle projection $4^{h'}$ est sur $\sigma^{h'}$. Puis nous avons cherché la projection nouvelle du point A pris sur *3*. Le plan (*1*, *2*) est déterminé dans le système H′V′ par le point A et la droite *4*.

On s'exercera à résoudre le même problème en abandonnant le plan horizontal d'abord.

APPLICATION XXIV.

247. *Une droite* d *étant représentée dans le système* HV, *on demande de prendre un nouveau plan de projection parallèle à* d, *et de déterminer la nouvelle projection de la droite* d.

Supposons (fig. 212), qu'on veuille conserver le plan horizontal. Le nouveau plan de projection V′ devant être parallèle à *d* et perpendiculaire à H, il est certain que la nouvelle ligne de terre sera parallèle à d^h (n° 239).

Soient ρ le plan de repère parallèle au plan H conservé, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H et V′ les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau. On déterminera, au moyen des points A et B par exemple, la nouvelle projection $d^{v'}$, comme il a été dit au numéro 245.

Il y aura avantage, parfois, à confondre la projection nouvelle du plan de repère avec d^h (fig. 213).

On s'exercera à résoudre le même problème en conservant le plan vertical.

APPLICATION XXV.

248. *Une droite* d, *parallèle à un plan de projection, étant représentée dans le système* HV, *on demande de prendre un nouveau plan de projection perpendiculaire à* d, *et de chercher la nouvelle projection de la droite* d.

Si la droite donnée *d* est par exemple, une droite de front (fig. 214)

il faudra combiner avec le plan V un plan H′ tel que la nouvelle ligne de terre soit perpendiculaire à la projection verticale de la droite. Soient ρ le plan de repère parallèle au plan V conservé, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H′ et V les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau. La projection $d^{h'}$ se réduira à un point qui peut se marquer immédiatement, attendu qu'on connaît la distance de la droite *d* au plan ρ.

APPLICATION XXVI.

249. *Une droite quelconque* d *étant représentée dans le système* HV, *on demande de la représenter dans un nouveau système de plans de projection dont l'un soit perpendiculaire à la droite, et de chercher les nouvelles projections de cette droite.*

Une droite perpendiculaire à un plan de projection étant parallèle à l'autre, il suffira d'exécuter successivement les changements de plan de projection indiqués dans les deux applications précédentes.

Ainsi, dans la figure 215, on a abandonné d'abord le plan V pour arriver à un système de plans de projection H′ et V′, dans lequel le plan H′ est perpendiculaire à la droite *d*.

Dans la figure 216, on a abandonné d'abord le plan H pour arriver à un système de plans de projection H′ et V′, dans lequel le plan V′ est perpendiculaire à la droite *d*.

APPLICATION XXVII.

250. *Un plan (1, 2) étant représenté dans le système* HV, *on demande de prendre un nouveau plan de projection perpendiculaire à (1, 2) et de représenter le plan (1, 2) dans le nouveau système de plans de projections.*

Soit un plan (*1*, *2*) dans lequel la droite *2* est une horizontale (fig. 217), et supposons que l'on veuille abandonner le plan V.

Le nouveau plan V′ devant être perpendiculaire au plan (*1*, *2*) et au plan horizontal, doit être perpendiculaire à une horizontale

quelconque du plan donné; on prendra donc une nouvelle ligne de terre perpendiculaire à la projection horizontale de l'horizontale *2*.

Soient ρ le plan de repère parallèle au plan H conservé, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H et V' les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau. On déterminera les nouvelles projections de l'horizontale *2* et d'un point A du plan, et l'on aura ainsi, en $\alpha^{v'}$, la projection du plan (*1*, *2*) sur le plan V' qui lui est perpendiculaire.

Dans la figure 218, le plan est donné par la droite de profil (A, B) et le point C. Nous avons abandonné le plan horizontal; par conséquent, la nouvelle ligne de terre doit être perpendiculaire à la projection verticale d'une droite de front *1* déterminée dans le plan (A, B, C). Soient ρ le plan de repère, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H' et V les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau. Les projections nouvelles de la droite de front *1* et du point A déterminent la projection $\alpha^{h'}$ du plan (A, B, C) sur le nouveau plan H'.

APPLICATION XXVIII.

251. *Un plan* α *perpendiculaire à un plan de projection, étant représenté dans le système* HV, *on demande de prendre un nouveau plan de projection parallèle au plan* α.

Si le plan α est par exemple, perpendiculaire au plan vertical, il faudra (n° 238) combiner, avec V, un plan H' dont la projection verticale soit parallèle à la projection verticale de α. La direction de la nouvelle ligne de terre sera donc parallèle à α^{v}.

APPLICATION XXIX.

252. *Un plan étant représenté dans le système* HV, *on demande de le représenter dans un nouveau système de plans de projection dont l'un soit parallèle au plan donné.*

Un plan parallèle à un plan de projection étant perpendiculaire à l'autre, il suffira d'exécuter successivement les changements indiqués

dans les deux applications précédentes. Ainsi, dans la figure 219, étant donné un plan par une droite de front x et le point A, nous avons d'abord abandonné le plan H, pour arriver au système de plans de projection H'V' dans lequel le plan V' est parallèle au plan (A, x) ou α.

§ 5. REMARQUES, PROBLÈMES, APPLICATIONS ET EXERCICES.

Remarque I. — 253. Le changement des plans de projection permet de satisfaire à toutes les exigences relatives à la représentation des corps.

Supposons que l'on veuille représenter un corps (fig. 220) formé d'un prisme droit à base carrée, surmonté d'une pyramide ayant comme base une section faite dans le prisme par un plan parallèle au plan ρ de la base du prisme.

Ce corps est représenté dans le système HV; les points de la face verticale située dans le plan α et les points de la face triangulaire correspondante dans la pyramide, sont les seuls points vus pour le plan V (nos 141 à 148). Pour le plan H, on ne voit que les points des faces triangulaires de la pyramide.

Supposons que l'on veuille, en conservant le plan H, une projection V' nouvelle, telle que les points de la face verticale β et de la face triangulaire correspondante dans la pyramide, soient vus pour le plan V'. Alors les perpendiculaires au plan V' menées par les points du plan β et de la face triangulaire correspondante ne devront pas percer le corps au-dessus de ces points. La projection V' de la figure 220 satisfait à cette condition. De même, le système HV'' nous montre les points de la face verticale γ et le système HV''' nous montre les points de la face verticale δ.

Si nous voulons, en conservant l'un des plans verticaux, le plan V', par exemple, dessiner une nouvelle projection, sur un plan H', de telle manière que les points de la face située dans le plan ρ soient vus pour le plan H', les perpendiculaires au plan H' menées par les points du plan ρ, ne devront pas percer le corps au-dessus de ces points. La projection H' de la figure 220 satisfait à cette condition.

Remarque II. — **254.** Nous avons vu qu'au moyen de deux mouvements de rotation ou de deux changements de plan de projection, on peut amener une droite quelconque à être perpendiculaire à un plan de projection (n°s 232 et 249), et un plan quelconque, à être parallèle à un plan de projection (n°s 235 et 252). Il est bien évident que l'on peut aussi combiner une rotation avec un changement de plan de projection, pour arriver aux mêmes résultats.

Remarque III. — **255.** Le rabattement d'un plan quelconque sur un plan parallèle à un plan de projection, peut être ramené au rabattement sur le même plan, d'un plan vertical ou debout. Il suffira de prendre avant de rabattre, un nouveau plan de projection perpendiculaire au plan donné, ou bien d'amener ce dernier plan, au moyen d'une rotation, à être perpendiculaire à un plan de projection.

EXERCICE XXX. — **256.** *Trouver une figure égale à une figure plane donnée,* en ayant égard à la remarque précédente.

Supposons (fig. 221) un plan (*1*, *2*) et soit l^h la projection horizontale d'une ligne l située dans ce plan. On déterminera la projection verticale de l, en cherchant les projections verticales de différents points de l, au moyen par exemple, des génératrices g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, du plan donné (n° 103). Amenons alors le plan (*1*, *2*) en α_1 perpendiculairement au plan vertical (n° 233), en le faisant tourner autour de l'axe a, et puis, rabattons le plan α_1 sur le plan de front π, autour de la charnière *ch*. Un point quelconque X de l, se rabattra après la rotation, en X_{1r} à une distance de ch^v égale à AX^h. On déterminera de même les rabattements des autres points de l et l'on voit qu'il n'est pas plus difficile ici, de rabattre un plan quelconque que de rabattre un plan perpendiculaire à un plan de projection.

APPLICATION XXX.

257. *On donne* (fig. 222), *sur un même plan horizontal ou de front, les rabattements d'un même point autour de deux charnières. On demande de déterminer les projections du point non rabattu.*

Supposons que l'on connaisse, sur le plan de front α, les

rabattements A_{1r} et A_{2r} du point A, autour des charnières ch_1 et ch_2. Ces points A_{1r} et A_{2r} doivent se trouver en même temps du côté des pointes ou du côté des barbes des flèches relatives aux deux charnières; de plus, la distance du point A au point B de rencontre des charnières étant égale à $A_{1r}B$ et à $A_{2r}B$, les distances $A_{1r}B$ et $A_{2r}B$ doivent être égales.

Le point A_{1r} se relève dans le plan μ_1 perpendiculaire à ch_1, le point A_{2r} se relève dans le plan μ_2 perpendiculaire à ch_2; par conséquent, le point A relevé appartient à l'intersection *i* des plans μ_1 et μ_2 et aux circonférences décrites par les points A_{1r} et A_{2r}. Si nous rabattons le plan μ_1 par exemple, sur le plan de front α, le point A devra, dans ce nouveau rabattement, se trouver en A_{3r} sur l'intersection du rabattement de *i* et du rabattement de la circonférence décrite par A_{1r}, dans un sens indiqué par les flèches. Dès lors, les projections du point A sont connues (n° 211).

APPLICATION XXXI.

258. *Connaissant les distances d'un point* M *à trois points* A, B, C, *donnés dans un plan horizontal ou de front, on demande les projections du point* M.

Le point demandé est l'un des deux points communs aux sphères ayant les points donnés comme centres et les distances données comme rayons (n° 29).

Nous rappellerons cette solution, quand nous nous occuperons de l'intersection des surfaces courbes; mais nous pouvons employer ici la solution donnée pour l'application précédente.

Supposons (fig. 223) que les trois points donnés, A, B, C, appartiennent à un plan horizontal α, et que l'on considère, parmi les deux points satisfaisant au problème, le point M qui se trouve au-dessus du plan α. Nous pouvons marquer les rabattements M_{1r} et M_{2r} du point M sur le plan α, autour des charnières AB et BC, puisque nous connaissons les distances MA, MB et MC. De la connaissance de ces rabattements, nous pouvons conclure, comme nous l'avons vu au numéro précédent, les projections du point M.

On voit combien il est facile de représenter un point déterminé par ses distances à trois points du plan de l'épure (n° 28).

EXERCICE XXXI. — **259**. Déterminer, dans la figure 163, en conservant le plan horizontal, une nouvelle projection verticale V', telle que les faces ABB' et B'BC soient vues pour le plan V'.

PROBLÈME XXXVI.

260. *On demande de déterminer une ligne quelconque* a *située dans un plan de profil et de représenter un point appartenant à cette ligne* (n°s 53, 55, 62 et 104).

Nous savons que les projections de *a* sont confondues avec les projections du plan de profil et qu'elles ne sauraient déterminer la ligne dans l'espace. Mais nous pouvons amener le plan de profil, par un rabattement, à être parallèle à un plan de projection, et dès lors, *a* se projettera, sur ce plan, suivant une figure égale. On pourra prendre sur la ligne rabattue, un point quelconque que l'on saura relever.

Dans la figure 224, nous avons rabattu le plan de profil sur le plan de front α, et nous avons relevé le point A_r pris sur le rabattement de *a*.

On aurait pu employer aussi une rotation (n° 234) ou un changement de plan de projection (n° 251).

Ainsi, dans la figure 225, nous avons abandonné le plan V, pour prendre un nouveau plan V' parallèle au plan de profil qui contient la ligne *a*.

PROBLÈME XXXVII.

261. *Mener par un point* M, *une parallèle à une droite* (A, B) *située dans un plan de profil* (n°s 73 et 127).

Le problème se résoudra sans difficulté, après avoir pris un nouveau plan de projection.

Ainsi, dans la figure 226, nous avons abandonné le plan V, pour prendre un nouveau plan V' parallèle au plan de profil.

Soient $\rho^{r'}$ la direction de la nouvelle ligne de terre, ρ le plan de repère parallèle au plan H conservé, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H et V' les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau. Après avoir déterminé les projections nouvelles de la droite AB et du point M, nous avons, dans le système HV', mené par M, une parallèle à AB. Cette parallèle a été déterminée, dans le système H V, par M et par le point N du plan de repère.

On pourrait aussi employer les rabattements ou les rotations.

PROBLÈME XXXVIII.

262. *Mener, par un point* A, *une perpendiculaire à un plan parallèle à la ligne de terre* (nº 117).

La droite demandée se trouve nécessairement dans le plan de profil mené par A et elle est perpendiculaire à l'intersection de ce plan de profil avec le plan donné. On la représentera facilement, après avoir amené le plan de profil parallèlement à un plan de projection, ou après avoir pris un nouveau plan de projection perpendiculaire à la ligne de terre.

Dans la figure 227, le plan parallèle à la ligne de terre est le plan (x, A). Pour mener par A, une perpendiculaire au plan, nous ferons un changement de plan de projection. Supposons que nous voulions conserver le plan V et que nous prenions un nouveau plan H' perpendiculaire à la ligne de terre. Soient ρ le plan de repère, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H' et V les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau. Après avoir déterminé les projections nouvelles du point A et de la droite x, nous obtenons en $\alpha^{h'}$ la projection du plan (x, A) sur le plan H'. Nous dessinons facilement, dans le système H'V, les projections de la perpendiculaire p menée par A au plan α et en déterminant la projection horizontale d'un point X de p, cette droite p sera déterminée dans le système HV par les points A et X.

PROBLÈME XXXIX.

263. *Mener, par un point* M, *un plan perpendiculaire à une droite* AB *située dans un plan de profil* (n° 118).

Le problème sera très facilement résolu, en prenant comme nouveau plan de projection un plan perpendiculaire à la ligne de terre.

Supposons (fig. 228) que l'on veuille abandonner le plan H pour prendre un nouveau plan perpendiculaire à la ligne de terre. Après avoir déterminé les nouvelles projections du point M et de la droite AB, la projection $\alpha^{h'}$ du plan demandé sera connue et si l'on veut revenir au système HV, le plan α sera déterminé, dans ce système, par le point M et les projections d'une droite *x* du plan α.

APPLICATION XXXII.

264. *Voir si deux droites* a *et* b, *situées dans un plan de profil, se coupent ou sont parallèles. Déterminer, s'il y a lieu, leur point d'intersection* (n°s 71, 72, 98 et 126).

Si l'on rabat le plan de profil sur un plan horizontal ou de front et que l'on cherche les rabattements des deux droites, on verra sur ces rabattements, si *a* et *b* se coupent ou sont parallèles.

Si les droites se coupent, on obtiendra les projections de leur point de rencontre en relevant le plan de profil.

Au moyen d'une rotation ou d'un changement de plan de projection, on résoudra le problème tout aussi facilement.

APPLICATION XXXIII.

265. *Déterminer un point de l'intersection de deux plans* α *et* β, *en employant un plan de profil comme plan auxiliaire* (n° 125).

Il suffira de déterminer les intersections de α et β avec le plan de profil donné (n° 122, 4°), et de prendre le point commun à ces deux intersections (n° 264).

Ainsi, soient (fig. 230) deux plans (*1*, A) et (*2*, *3*). L'intersection du plan (*1*, A) et du plan auxiliaire de profil π, est déterminée par les deux points A et B; celle des plans (*2*, *3*) et α est déterminée par les deux points C et D. Pour avoir le point de rencontre de ces deux intersections, rabattons par exemple, le plan α sur le plan horizontal ρ. La droite AB se rabattra en AB_r et la droite CD, en C_rD_r; I_r sera le rabattement du point d'intersection qu'on relèvera facilement en I.

APPLICATION XXXIV.

266. *On donne une droite située dans un plan de profil et l'on demande :*

1° *Son intersection avec un plan* α *perpendiculaire à un plan de projection,*

2° *Son point d'intersection avec le second plan bissecteur* (n°s 69, 97, 105, 134 et 135).

Supposons (fig. 229) que le plan α soit perpendiculaire au plan horizontal et que la droite soit donnée par les points A et B. Pour déterminer les points de rencontre demandés, appliquons la règle générale donnée au numéro 133 et prenons pour plan auxiliaire le plan de profil β contenant AB. On obtient immédiatement ses intersections i et i'' avec le plan α et le second plan bissecteur.

Les points de rencontre de ces intersections, avec AB, se déterminent (n° 264) en ayant recours à un rabattement, à une rotation ou à un changement de plan de projection.

Ainsi, rabattons le plan β sur le plan horizontal ρ. La droite AB se rabat en AB_r; l'intersection avec le plan α se rabat en i_r et l'intersection avec le second plan bissecteur se rabat en i''_r. Les points de rencontre de AB avec le plan α et le plan bissecteur sont donc rabattus en M_r et N_r, aux points de rencontre de A_rB_r avec i_r et i''_r.

Il suffit de relever le plan β pour trouver les projections des points M et N.

La même figure peut s'interpréter par un changement de plan de projection.

APPLICATION XXXV.

267. *On demande le point de rencontre avec un plan quelconque, d'une droite située dans un plan de profil. en employant ce plan de profil comme plan auxiliaire* (nos 125 et 133).

On agira comme dans le numéro précédent.

APPLICATION XXXVI.

268. *Mener par un point* A, *une perpendiculaire à une droite* d (nos 77 et 131).

1° Si le point A était situé sur la droite *d*, le problème serait indéterminé.

2° Si la droite *d* était perpendiculaire à un plan de projection, la perpendiculaire demandée serait immédiatement connue (n° 77). On peut ramener facilement, à ce cas très simple, celui où la droite *d* est quelconque par un double mouvement de rotation ou un double changement de plan de projection ou un mouvement de rotation combiné avec un changement de plan de projection, et retourner avec la solution, à la position primitive de la figure.

3° Si la droite *d* était parallèle à un plan de projection, sans être verticale ou debout, on résoudrait aisément le problème (n° 77). On peut ramener facilement, à ce cas très simple, celui où la droite *d* est quelconque, par un mouvement de rotation ou un changement de plan de projection, et retourner avec la solution, à la position primitive de la figure.

4° Si le plan de la droite *d* et du point A était parallèle à un plan de projection, on aurait immédiatement les projections de la perpendiculaire demandée (n° 6). On peut ramener facilement à ce cas très simple, celui où le plan (*d*,A) est quelconque, par un rabattement, ou un double mouvement de rotation, ou un double changement de plan de projection, ou un mouvement de rotation combiné avec un changement de plan de projection, et retourner avec la solution, à la position primitive de la figure.

Dans la figure 231, nous avons rabattu le plan (A, *d*) sur un

plan de front α. La charnière est déterminée par les points où elle s'appuie sur la droite *d* et sur une génératrice *g* du plan (A, *d*). Le point A est rabattu en A_r. Le rabattement d_r de la droite *d* est connu par son point sur la charnière, et par le rabattement B_r du point B pris à la rencontre de *g* et de *d*; le choix du point B permet de marquer immédiatement B_r, sur le rabattement g_r de la droite *g* (n° 219). La perpendiculaire abaissée de A sur *d*, se projette verticalement, après rabattement, suivant une droite $A_r^v P_r^v$ faisant avec d_r^v un angle droit, et il suffit de relever le plan (A, *d*) pour avoir les projections de la perpendiculaire avant le rabattement. Le point A_r se relève en A, le point P_r se relève en P sur la droite *d* et les projections de la perpendiculaire demandée, sont $A^v P^v$ et $A^h P^h$. Le point I où la perpendiculaire rabattue $A_r P_r$ rencontre la charnière, appartient aussi à la perpendiculaire relevée.

5° Rappelons enfin, la solution générale donnée au numéro 131.

EXERCICE XXXII. — 269. *On demande le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre.*

Nous avons indiqué au numéro 140, le procédé général à suivre pour résoudre cette question. Mais nous avons vu dans le même numéro, que quand la base du tétraèdre est située dans un plan horizontal ou de front, les tracés sont extrêmement simples et par conséquent, un tétraèdre quelconque étant donné, on peut se proposer, par un double mouvement de rotation, ou un double changement de plan de projection, ou par un mouvement de rotation et un changement de plan de projection, d'amener l'une des faces de la pyramide à être parallèle à un des plans de projection. Ayant déterminé le centre de la sphère circonscrite, pour cette position particulière, on retournera facilement au tétraèdre considéré dans sa position primitive.

APPLICATION XXXVII.

270. *Déterminer les projections d'une section plane faite dans un polyèdre* (nos 159 et 160).

Nous avons vu (n° 159) avec quelle facilité la section plane peut

être déterminée quand le plan sécant est vertical ou debout. On ramènera donc très avantageusement le cas où le plan est quelconque, au cas précédent, au moyen d'un mouvement de rotation ou d'un changement de plan de projection.

Comme exercice, les commençants traiteront utilement de cette manière, les exemples donnés dans le Problème XX (n°s 159 à 176).

EXERCICE XXXIII. — **Exemples de cristaux maclés.** — **271.** Comme application de la méthode générale donnée au numéro 182 pour la recherche de l'intersection de deux polyèdres, nous choisirons deux exemples pris dans la Cristallographie.

272. On sait que les différentes faces d'un cristal sont liées par une loi simple à un système de droites appelées *axes* qui servent à définir le cristal (*).

Les cristaux sont rarement *isolés*. Quand ils ne sont pas isolés, ils constituent des *groupements* de deux, trois ou plusieurs cristaux.

On distingue les groupements *irréguliers* où l'orientation réciproque des différents cristaux n'est soumise à aucune loi, et les groupements *réguliers* où cette orientation est soumise à des lois.

Les groupements réguliers peuvent être à *axes parallèles*, les cristaux étant accolés ou se compénétrant; les groupements réguliers peuvent être aussi à *axes non parallèles* et dans ce cas, on dit que les cristaux sont *maclés* ou forment une *macle*.

On distingue les macles par *juxtaposition* et les macles par *pénétration*.

C'est dans la représentation des macles par pénétration, où l'on trouve, aussi nombreux qu'intéressants, des exemples bien définis d'intersections de polyèdres, que nous choisirons nos applications. Nous donnerons la représentation d'une macle de Fluorine (**) et d'une macle de *Feldspath Orthose* (***).

(*) Voir par exemple Renard, Notions de Minéralogie, Gand, Ad. Hoste, 1900.

(**) Représentation chimique : $Ca\,Fl^2$.

(***) Représentation chimique : $K^2Al^2Si^6O^6$.

Macle par pénétration de deux cristaux de fluorine. — **273.** Imaginons un cube ABCDA'B'C'D' et représentons-le (fig. 232 et 233) dans un système de plans de projection dont l'un H est parallèle aux faces ABCD, A'B'C'D' et dont l'autre V est parallèle aux faces ADD'A', BCC'B'.

Nous n'affectons pas, dans l'épure, les lettres désignant les sommets, des exposants *h* et *v* servant à distinguer les projections horizontales des projections verticales, parcequ'il n'y a aucune confusion possible dans l'épure (n°s 42 et 147).

Imaginons un second cube symétrique du précédent par rapport à un plan α mené par le centre du cube parallèlement au plan CB'D'.

Pour représenter ce second cube, prenons le plan ρ pour plan de repère (n° 237) et remplaçons le système des plans de projection H et V (fig. 232 et 233) par le système des plans H et V' (fig. 232 et 234), dans lequel le plan V' est perpendiculaire au plan CB'D' (n° 250). Le plan de symétrie α est alors debout et la représentation du cube MNPQM'N'P'Q', symétrique du cube donné, ne présente aucune difficulté.

C'est dans le système (H, V') que nous chercherons d'abord l'intersection des deux cubes dont l'ensemble constitue une macle de fluorine. Le passage au système primitif (H, V) se fera aisément.

	MNPQ.	M'N'P'Q'.	MNM'N'.	NPN'P'.	PQP'Q'.	QMQ'M'.
ABCD.	3-4.	A. XIII.	A-3.	I.	II.	A-4.
A'B'C'D'.	C'. XIV	1-2.	III.	C'-1.	C'-2.	IV.
ABA'B'.	VI.	A-1.	A-5.	1-5.	V.	A. XV.
BCB'C'.	C'-3.	VIII.	3-5.	C'-5.	C'. XVI.	VII.
CDC'D'.	C'-4.	X.	IX.	C'. XVII.	C'-6.	4-6.
DAD'A'	XII.	A-2.	A. XVIII.	XI.	2-6.	A-6.

Dressons (n° 182) le tableau synthétique des opérations, tableau que le lecteur devra construire dans ses états successifs, et faisons immédiatement les remarques suivantes :

1° A et M' sont deux sommets communs, par conséquent le

point A appartient aux intersections de toutes les faces qui comprennent le point A avec toutes les faces qui comprennent le point M′; donc le point A doit être inscrit dans tout compartiment auquel correspondent un nom comprenant la lettre A et un nom comprenant la lettre M′ : il y en a neuf.

2° C′ et P sont deux sommets communs et de même qu'au 1°, le point C′ doit être inscrit dans tout compartiment auquel correspondent un nom comprenant la lettre C′ et un nom comprenant la lettre P : il y en a neuf.

3° Les arêtes A′B′ et N′P′ ont nécessairement, en vertu de la symétrie par rapport au plan α, un point commun *1* qui appartient aux intersections des faces passant par A′B′ avec celles qui passent par N′P′; donc le point *1* doit être inscrit dans tout compartiment auquel correspondent un nom comprenant les lettres A′ et B′, et un nom comprenant les lettres N′ et P′ : il y en a quatre.

4° De même, les arêtes A′D′, P′Q′ ont un point commun *2*; les arêtes BC, MN ont un point commun *3*; les arêtes CD, MQ ont un point commun *4*; les arêtes BB′, NN′ ont un point commun *5*; les arêtes DD′, QQ′ ont un point commun *6*. Chacun de ces points doit être inscrit dans quatre compartiments, comme nous l'avons indiqué au 3° pour le point *1*.

5° On voit facilement que la face ABCD ne saurait donner d'intersections utiles avec les faces NPN′P′ et PQP′Q′; les compartiments marqués des numéros d'ordre I et II peuvent donc ne pas être considérés.

De même, les compartiments III et IV, V et VI, VII et VIII, IX et X, XI et XII correspondent à des intersections inutiles à considérer.

6° Si nous considérons le compartiment XIII correspondant aux faces ABCD et M′N′P′Q′, on voit que le point A est le seul point utile commun à ces deux faces et qu'il n'y a pas lieu de considérer l'intersection.

Il en est de même des compartiments XIV, XV, XVI, XVII et XVIII.

7° Enfin, les dix-huit compartiments restants correspondent à des intersections entièrement déterminées et qui sont : 3-4-A-3,

1-2-C′-1, A-1-5-A, C′-3-5-C′, C′-4-6-C′, A-2-6-A. Il n'y a plus qu'à représenter ces six triangles en tenant compte du vu et du caché, puis à les reporter dans le système (H, V).

274. La figure 235 est une perspective cavalière (n° 156) obtenue sur un tableau confondu avec le plan BCB′C′. Le rapport de réduction est *1 : 2*.

Macle par pénétration, suivant la loi de Carlsbad, de deux cristaux de Feldspath Orthose. — 275. Imaginons trois axes, OX, OY, OZ, tels que l'angle XOZ soit égal à 116°3′ et que l'axe OY soit perpendiculaire au plan XOZ (fig. 236 et 237).

Choisissons un plan horizontal de projection H, perpendiculaire à OZ et un plan vertical de projection V, parallèle au plan XOZ.

Nous n'utiliserons pas, dans l'épure, les exposants *h* et *v* pour distinguer la projection horizontale de la projection verticale, parcequ'il n'y aura aucune confusion possible entre ces deux projections.

Imaginons un décaèdre symétrique par rapport au plan XOZ et présentant :

1° Deux faces de front BCDGHI, B′C′D′G′H′I′, coupant l'axe OY aux deux points $\pm$ 20^{mm};

2° Deux faces debout CDED′C′, KIHH′I′, parallèles au plan XOY et coupant l'axe OZ aux deux points $\pm$ 64^{mm};

3° Deux faces debout ABCC′B′, FGHH′G′, coupant les axes OX et OZ aux points $\pm$ 55^{mm} et $\mp$ 93^{mm};

4° Deux faces verticales ABIK, AB′I′K, coupant les axes OX et OY respectivement aux points — 60^{mm} et $\pm$ 92^{mm};

5° Deux faces verticales EDGF, ED′G′F coupant les axes OX et OY respectivement aux points + 60^{mm} et $\pm$ 92^{mm}.

Ce décaèdre ABB′CC′DD′EFGG′HH′II′KA, que nous appellerons AF, représente un cristal de feldspath orthose.

Faisons glisser le décaèdre précédent, parallèlement à OY, de 10^{mm} en arrière de sa position primitive et dans cette position nouvelle, construisons-en, par rapport au plan de profil YOZ, le symé-

trique LMM'NN'PP'QRSS'TT'UU'VL que nous appellerons LR et qui représente un second cristal de feldspath orthose.

Nous avons aussi représenté les deux décaèdres (fig. 237 et 238) dans le système (VH') en prenant le plan ρ pour plan de repère (n° 237).

Les deux polyèdres constituent une macle par pénétration, suivant la loi de Carlsbad, de deux cristaux de feldspath orthose.

Pour chercher l'intersection des deux décaèdres, dressons le tableau synthétique des opérations, tableau que le lecteur devra construire lui-même dans ses états successifs, et faisons immédiatement les remarques suivantes :

	ABB' CC'.	CC' DD'E.	EDGF.	ED'G'F.	FGG' HH'.	HH' II'K.	KIBA.	KI'B'A.	BCD GHIB.	B'C'D' G'H'I'B'.
LMM' NN'.	1-2.	19-20.	XX.	LX.	LXV.	LXIX.	XXIX.	LXXIII.	I.	20-1.
NN' PP'Q.	LII.	17-18.	XXI.	15-16.	LXVI.	LXX.	XXX.	LXXIV.	II.	16-17.
QPSR.	LIII.	LVI.	XXII.	14-15.	13-14.	LXXI.	XXXI.	LXXV.	III.	LXXVIII.
QP'S'R.	XLV.	XLVI.	XXIII.	XLVII.	XLVIII.	XLIX.	XXXII.	L.	IV.	LI.
RSS' TT'.	LIV.	LVII.	XXIV.	LXI.	11-12.	9-10.	XXXIII.	LXXVI.	V.	10-11.
TT' UU'V.	LV.	LVIII.	XXV.	LXII.	LXVII.	7-8.	XXXIV.	5-6.	VI.	6-7.
VUML.	3-4.	LIX.	XXVI.	LXIII.	LXVIII.	LXXII.	XXXV.	4-5.	VII.	LXXIX.
VU'M'L.	XXXVIII.	XXXIX.	XXVII.	XL.	XLI.	XLII.	XXXVI.	XLIII.	VIII	XLIV.
MNP STUM.	2-3.	18-19.	XXVIII.	LXIV.	12-13.	8-9.	XXXVII.	LXXVII.	IX.	LXXX.
M'N'P' S'T'U'M'.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	X.	XIX.

1° Le plan de la face BCDGHIB ne donne aucune intersection utile avec le polyèdre LR et les compartiments I à X ne doivent pas être considérés ;

2° De même, les compartiments XI à XIX correspondant à la face M'N'P'S'T'U'M', les compartiments XX à XXVIII correspondant à la face EDGF, les compartiments XXIX à XXXVII correspondant à la face KIBA, les compartiments XXXVIII à XLIV correspondant à la face VU'M'L, les compartiments XLV à LI correspondant à la face QP'S'R ne doivent pas être considérés;

3° Le plan de la face ABB'CC' ne donne aucune intersection utile avec les plans d'une série de faces qui correspondent, dans le polyèdre LR, aux compartiments LII à LV;

4° De même, les compartiments LVI à LIX correspondant à la face CC'DD'E, les compartiments LX à LXIV correspondant à la face EG'D'F, les compartiments LXV à LXVIII correspondant à la face FGG'HH', les compartiments LXIX à LXXII correspondant à la face HH'II'K, les compartiments LXXIII à LXXVII correspondant à la face KI'B'A, les compartiments LXXVIII à LXXX correspondant à la face B'C'D'G'H'I'B' ne doivent pas être considérés;

5° Il reste à examiner vingt compartiments, mais chacune des intersections correspondantes résulte de la rencontre de deux plans dont l'un est toujours debout ou vertical et l'autre aussi; donc toutes ces intersections s'obtiennent immédiatement et l'on n'a pas à s'inquiéter des points de rencontre de chacune d'elles avec les arêtes des faces correspondantes. Nous avons donné les extrémités des parties utiles de chaque intersection en commençant par la partie utile 1-2 qui résulte de l'intersection des plans debout ABB'CC' et LMM'NN'.

6° On voit maintenant que l'intersection des deux polyèdres est un contour polygonal fermé 1-2-3-4..... 18-19-20-1, dont on reconnaîtra aisément les parties vues et les parties cachées.

276. La figure 239 représente une perspective cavalière obtenue sur un tableau parallèle au plan de profil YZ (n° 156).

Remarque. — **277**. Les exemples que nous venons de donner montrent avec quelle facilité on arrive méthodiquement et sans aucun tâtonnement à la connaissance de l'intersection de deux polyèdres et à la

vue dans l'espace des combinaisons de ces polyèdres. Tout autre exemple qu'on pourrait proposer aurait la même portée dont l'importance n'échappera pas à l'attention du lecteur qui est aux prises avec le problème dont nous avons systématisé la résolution.

EXERCICE XXXIV. — 278. Sur une longueur donnée dans un plan, construire un polygone semblable à un polygone donné.

EXERCICE XXXV. — 279. Faire tourner un point, une droite ou un plan, d'un angle donné, autour d'un axe parallèle à l'un des plans de projection.

EXERCICE XXXVI. — 280. Faire tourner un point, une droite ou un plan, d'un angle donné, autour d'un axe quelconque.

EXERCICE XXXVII. — 281. Amener une droite à être de profil. — Amener un plan à être parallèle ou perpendiculaire à la ligne de terre.

EXERCICE XXXVIII. — 282. Étant données deux droites *a* et *b* non situées dans un même plan, trouver sur l'une d'elles *a*, un point tel que la perpendiculaire abaissée sur l'autre droite *b*, soit égale à une longueur donnée.

On résoudra cet exercice en amenant la droite *b* à être perpendiculaire à un plan de projection.

CHAPITRE III.

Plus courtes distances entre les points, les droites et les plans. Angles des droites et des plans.

---

§ 1. GÉNÉRALITÉS.

Comment on trouve la grandeur d'une figure plane. — **283**. La distance entre deux points se projette suivant une distance égale, sur un plan de projection parallèle à la droite des deux points. L'angle formé par deux droites et en général, toute figure plane se projette suivant une figure égale, sur un plan de projection parallèle au plan de la figure (n° 6).

Si le parallélisme n'existe pas, on pourra l'établir, en employant les rabattements, rotations et changements de plan de projection. Ces procédés nous permettront de résoudre tous les problèmes de ce chapitre.

§ 2. DES PLUS COURTES DISTANCES.

PROBLÈME XL.

284. *On demande de déterminer la distance de deux points* (nos 213 et 214).

Si la droite, passant par les points A et B (fig. 240), n'est pas parallèle à un plan de projection, on pourra rabattre un plan passant par cette droite, sur un plan parallèle à un plan de projection. Ainsi, prenons pour plus de facilité, le plan projetant horizontalement la distance AB et rabattons-le autour de la charnière *ch*, sur le plan ρ

mené par le point A, parallèlement au plan horizontal. Le point A restera immobile dans le rabattement et nous aurons, en $A^hB^h_r$, la projection horizontale du rabattement de la distance et, par suite, la longueur demandée.

Dans la figure 241, nous avons fait tourner la droite AB, autour de l'axe *a* mené par A, perpendiculairement au plan vertical, de manière à amener AB sur l'horizontale AB_1. Nous obtenons ainsi, en $A^hB^h_1$, la distance des points A et B.

Dans la figure 242, nous avons pris un nouveau plan vertical de projection, parallèle à la droite AB. La nouvelle projection $A^{v'}B^{v'}$ donne encore la solution du problème.

Chacune des figures 240 à 242 justifie la règle importante donnée au numéro 214.

EXERCICE XXXIX. — 285. Trouver les longueurs des arêtes latérales d'une pyramide, en les faisant tourner autour d'un axe vertical ou debout passant par le sommet de la pyramide.

EXERCICE XL. — 286. Trouver les longueurs des arêtes latérales d'un prisme, en prenant un nouveau plan de projection parallèle à ces arêtes.

EXERCICE XLI. — 287. Tracer dans un plan, le développement d'une pyramide représentée par ses projections, en s'aidant de la section plane faite, dans la pyramide, par un plan de projection.

EXERCICE XLII. — 288. Tracer dans un plan, le développement d'un prisme, en s'aidant d'une section droite que l'on détermine au préalable dans le prisme (nos 190 et 219).

PROBLÈME XLI.

289. *Porter sur une droite* d, *à partir d'un point* A *pris sur cette droite, une longueur donnée* (nos 215 et 216).

La droite *d* étant amenée, comme dans le problème précédent, parallèlement à un plan de projection, on portera la longueur donnée

sur la droite dans sa nouvelle position, et l'on reviendra ensuite aux données du problème.

Supposons, par exemple (fig. 243), qu'on amène la droite *d* à être parallèle au plan V, en la faisant tourner autour d'un axe vertical *a* mené par le point A. Le point A restera immobile et le point X ira se placer en X_1. Sur la droite de front AX_1, portons la longueur donnée, de A en B_1 (ou en sens inverse), et remettons le point B_1 sur la droite *d*, par un mouvement de rotation inverse et de même amplitude ; on obtiendra ainsi en B, les projections du point demandé.

Cette construction justifie la règle importante donnée au numéro 216 dont on n'oubliera pas la remarque finale.

EXERCICE XLIII. — **290.** Tracer les projections du plus court chemin à suivre sur la surface latérale d'une pyramide, en partant d'un point situé sur une arête, pour revenir au point de départ.

EXERCICE XLIV. 291. Tracer les projections du plus court chemin à suivre sur la surface latérale d'un prisme, en partant d'un point situé sur une arête, pour revenir au point de départ.

PROBLÈME XLII.

292. *On demande la plus courte distance d'un point* A *à une droite* d.

On sait que cette plus courte distance est donnée par la distance du point A au pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite *d*. Le problème doit donc être considéré comme résolu, car nous avons vu comment on peut mener par un point, une perpendiculaire à une droite (n° 268) et comment on peut chercher la distance de deux points (n° 284).

1° Si (fig. 244) la droite *d* est perpendiculaire à un plan de projection, par exemple au plan horizontal, on obtient sans difficulté, les projections de la plus courte distance : celle-ci est parallèle au plan horizontal et se projette sur ce plan suivant une longueur égale.

Nous pouvons ramener à ce cas très simple, celui où la droite

est quelconque, par un double mouvement de rotation, ou un double changement de plan de projection, ou par une rotation unique combinée avec un simple changement de plan de projection (nos 232, 249 et 254).

Ainsi, dans la figure 245, la droite d a été amenée d'abord sur la droite de front d_1, grâce à une rotation d'amplitude α, autour de l'axe vertical a; puis, la droite d_1 a été amenée sur la verticale d_2, grâce à une rotation, d'amplitude β, autour de l'axe debout a'. Le point A a tourné aussi autour de l'axe a, d'un angle α, jusqu'en A_1; dans la seconde rotation autour de a', le point A_1, situé sur a', est resté immobile.

La distance du point A à la droite d se trouve, après le double mouvement de rotation, en A_1P_2 et se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal. En remettant la droite d_2 successivement, par des rotations inverses, dans les positions d_1 et d, le point P_2 ira se placer en P_1 et en P, ce qui fera connaître, en AP, la position de la distance du point A à la droite d, avant les rotations qui ont servi à la donner en vraie grandeur.

2° Si la droite d est parallèle à un plan de projection, par exemple (fig. 246) au plan vertical, on connaît immédiatement dans ce cas, les projections de la perpendiculaire AB abaissée, du point A, sur la droite d. La distance demandée l s'obtiendra facilement par la règle connue (n° 214).

Nous pourrons ramener à ce cas, celui où la droite est quelconque, par une rotation ou un changement de plan de projection (nos 230 et 247).

3° Si le plan de la droite et du point était parallèle à un plan de projection, on aurait immédiatement sur ce plan, la distance du point à la droite.

Nous pouvons ramener, à ce cas très simple, celui où la droite est quelconque, par un rabattement, un double mouvement de rotation, un double changement de plan de projection, ou par une rotation, combinée avec un changement de plan de projection.

Dans la figure 247, nous avons rabattu le plan déterminé par le point A et la droite d sur le plan de front mené par le point A. Dans ce rabattement, le point B de la droite d et le point A sont immobiles, le point C se rabat en C_r, la droite d est donc rabattue

en d_r et la distance demandée est $A^vP^v_r$. Les projections du point P, se déterminent facilement sur les projections de *d*.

4° Enfin, on peut déterminer directement la distance demandée en exécutant les constructions indiquées en tête de ce numéro.

Ainsi, dans la figure 248, nous avons mené par le point A, un plan (*2*, *3*) perpendiculaire à la droite *d* (n° 118); nous avons ensuite déterminé le point P, intersection de la droite *d* avec le plan (*2*, *3*), au moyen d'un plan auxiliaire projetant verticalement la droite *d*: la plus courte distance demandée est la longueur AP que nous avons construite, en P^hX, d'après la règle connue.

PROBLÈME XLIII.

293. *Déterminer la plus courte distance d'un point* A *à un plan* α.

Cette plus courte distance est donnée par la distance du point A au pied P de la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan α.

Nous pouvons considérer le problème comme résolu dans les numéros 117, 262, 133 et 284.

1° Si le plan α est perpendiculaire à un plan de projection, par exemple (fig. 249) au plan horizontal, la distance AP, de A à α, est parallèle au plan horizontal et s'y projette en vraie grandeur. On peut ramener facilement, à ce cas très simple, celui où le plan α est quelconque, par une rotation ou un changement de plan de projection.

Ainsi, dans la figure 250, le plan α est donné par deux droites parallèles *1* et *2*. Nous avons pris un axe *a* debout passant par un point B de la droite *2* et nous avons, au moyen de la génératrice de front *g*, déterminé l'amplitude α de la rotation qu'il faut imprimer au plan α, autour de *a*, pour amener ce plan à être vertical. Le point C du plan P va occuper la position C_1, le point B reste immobile et le plan α, amené perpendiculairement au plan horizontal, a sa projection horizontale en α^h_1. Le point A, dont on cherche la distance au plan α, va occuper la position A_1, de sorte que la distance demandée *d* se projette en vraie grandeur en $A^h_1P^h_1$. L'extrémité P_1 de cette distance se remet en place, en P, par une rotation inverse

et de même amplitude, autour de l'axe *a*. Comme vérification, la projection A^vP^v doit être perpendiculaire à g^v (n° 110).

Dans la figure 251, le plan α est donné par le point M et l'horizontale *1*. Nous avons combiné avec le plan horizontal, un nouveau plan de projection V′ perpendiculaire à α. Soient $\rho^{v'}$ la direction de la nouvelle ligne de terre, ρ le plan de repère parallèle au plan H conservé, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H et V′ les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau. Le point M et la droite *1* donnent, par leurs projections nouvelles, la projection $\alpha^{v'}$ du plan (*1*, M); le point A a une nouvelle projection $A^{v'}$ et sa distance, au plan α, se trouve en vraie grandeur dans le système HV′ en $A^{v'}P^{v'}$. On revient facilement, pour le point P, au système HV.

2° On peut déterminer directement la distance d'un point à un plan, sans déplacer la figure ni les plans de projection.

Dans la figure 252, le plan (*1*, *2*) est donné par une horizontale *1* et une droite de front *2*; nous avons facilement les projections de la perpendiculaire abaissée du point A sur le plan (*1*, *2*) et nous en déterminons le pied P, au moyen du plan auxiliaire projetant horizontalement la perpendiculaire. Nous avons déterminé, en A^vX la distance des points A et P, par la règle connue.

PROBLÈME XLIV.

294. *Déterminer la plus courte distance de deux droites.*

On peut représenter, par les méthodes de la Géométrie Descriptive, les constructions enseignées en Géométrie, pour la résolution de ce problème. Ainsi, étant données les droites *d* et *d′* (fig. 253), on mènera par un point A de *d′*, une parallèle *d″* à *d*, de manière à déterminer un plan (*d′*, *d″*) parallèle à *d*. Puis par un point B de *d*, on abaissera une perpendiculaire *p* sur le plan (*d′*, *d″*) et l'on en cherchera le pied C; la distance BC est la plus courte distance demandée. Mais, si l'on veut avoir cette plus courte distance dans la position où elle s'appuie sur les droites *d* et *d′*, il faudra mener encore, par le point C, une parallèle à *d″* ou à *d*, jusqu'à sa rencontre D avec

la droite *d'*, et mener par D, une parallèle à *p* jusqu'à sa rencontre en F, avec la droite *d* : FD sera la perpendiculaire commune aux droites données et en mesurera aussi la plus courte distance.

1° Si l'une des deux droites est perpendiculaire à un plan de projection, la plus courte distance des deux droites est parallèle à ce plan de projection et s'y projette en vraie grandeur. Ainsi (fig. 254), la droite *d* étant perpendiculaire au plan horizontal, nous avons en $A^h B^h$ la distance des droites *d* et *d'*. On pourra ramener à ce cas très simple, celui où les deux droites sont quelconques, par deux mouvements de rotation, ou deux changements de plan de projection, ou une rotation combinée avec un changement de plan de projection (n° 254). Un mouvement de rotation ou un changement de plan de projection suffira, quand l'une des deux droites données sera parallèle à un plan de projection (n°s 231 et 248).

Ainsi (fig. 255), supposons une droite *d* parallèle à la ligne de terre et une droite quelconque *d'*. Si, en conservant le plan H, nous prenons un plan de profil comme nouveau plan de projection, on aura en $A^{v'} B^{v'}$, la distance de la droite *d* à la droite *d'*. On retournera facilement du système HV' au système HV.

2° Si (fig. 256), les deux droites *d* et *d'* se projettent suivant deux parallèles sur un des plans de projection, sur le plan vertical par exemple, la distance des deux droites s'obtiendra facilement par le procédé connu et rappelé dans la figure 253. Le plan mené par *d'*, parallèlement à *d*, est le plan projetant *d'* verticalement; la distance à ce plan, d'un point B de la droite *d*, est la longueur BC qui mesure la plus courte distance demandée. Pour avoir la plus courte distance sur la perpendiculaire commune aux droites données, menons par C, une parallèle à *d*, jusqu'à son point de recontre D avec *d'*; menons ensuite par D, une parallèle à BC jusqu'à son point de rencontre F avec *d*; la distance DF est la distance demandée en grandeur et position.

Dans ce cas qui donne lieu à une épure très simple, tout plan parallèle aux deux droites données est vertical ou debout; on pourra y ramener le cas où les deux droites sont quelconques, par une rotation ou un changement de plan de projection.

Ainsi (fig. 257), les droites données sont d et d'. Par le point A de d, menons une parallèle d'' à la droite d'; le plan (d, d'') est parallèle aux droites d et d' et il est facile d'en déterminer une horizontale g. Combinons ensuite avec le plan H un plan de projection V′ perpendiculaire au plan horizontal et au plan (d, d'') (n° 250). Soient $\rho^{v'}$ la direction de la nouvelle ligne de terre, ρ le plan de repère parallèle au plan H conservé, H et V les lettres désignant les plans de projection dans l'ancien système, H et V′ les lettres désignant les plans de projection dans le système nouveau. La droite d a une nouvelle projection $d^{v'}$, déterminée au moyen des projections nouvelles des points T et A; la droite $d'^{v'}$ est déterminée par les points $T_1^{v'}$ et $B^{v'}$ et comme vérification, $d^{v'}$ et $d'^{v'}$ doivent être parallèles.

D'après ce qui a été dit pour la figure 256, TD donne dans le système HV′, la plus courte distance et FG la donne aussi, sur la perpendiculaire commune aux droites d et d'.

3° Supposons que nous voulions exécuter les constructions rappelées au début de ce numéro (fig. 253 et 258), sans changer, ni la position de la figure, ni le système de plans de projection.

Dans la figure 258, nous avons mené, par le point A de d', une parallèle d'' à d. Pour abaisser, du point B de d, une perpendiculaire sur le plan (d', d''), nous avons déterminé dans ce plan, une horizontale g et une droite de front g'. Le point de rencontre C de la perpendiculaire p avec le plan (d', d''), a été obtenu au moyen du plan auxiliaire projetant p verticalement. La parallèle menée par C, aux droites d et d'', rencontre la droite d' en un point D, dont les deux projections doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; la parallèle à p, menée par D, rencontre la droite d en un point F, pour lequel les projections doivent encore se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Enfin, nous avons déterminé, en $F^{v}X$, la distance DF, en employant la règle connue.

4° On peut modifier les tracés précédents. Ainsi, après avoir (fig. 259) déterminé le plan (d', d'') parallèle à d et abaissé sur ce plan, d'un point B de d, la perpendiculaire p, on peut chercher directement le point I de rencontre de la droite d' avec le plan (d, p) et mener par I, une parallèle à p jusqu'à son point H de rencontre avec d. La distance IH

est la plus courte distance demandée et s'appuie sur les droites d et d'.

Dans la figure 260, le point A est pris sur d' de manière à avoir sa projection horizontale sur d^h; nous avons déterminé dans le plan (d', d''), une horizontale g et une droite de front g'; puis, nous avons mené la perpendiculaire p par le point B de la droite d. Le point de rencontre I, de la droite d' avec le plan (d, p), a été déterminé au moyen du plan projetant verticalement la droite d'. La parallèle IH, menée par I à la droite p, rencontre la droite d au point H, dont les deux projections doivent, comme vérification, se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. La distance des points I et H sera la distance demandée.

Dans la figure 261, les droites d et d' sont respectivement parallèles au plan horizontal et au plan vertical, ce qui nous fait connaître immédiatement les projections de la perpendiculaire p menée par exemple, par le point B, au plan parallèle à d et d'. Le point de rencontre I de d' avec le plan (d, p), a été déterminé au moyen du plan auxiliaire projetant horizontalement la droite d'. Les projections de la plus courte distance IH se détermineront comme dans la figure précédente, et la grandeur de IH a été obtenue en $I^{o}X$, par la règle connue.

295. La plus courte distance de deux droites d et d', peut se chercher encore de la manière suivante. Cette plus courte distance doit être perpendiculaire (fig. 262) à la droite d et à la droite d', donc elle doit être parallèle à deux plans, respectivement perpendiculaires à chacune de ces droites et par suite, elle doit être parallèle à l'intersection i de ces deux plans. Le problème revient alors à déterminer une droite s'appuyant sur deux droites données et parallèle à une direction donnée (nos 129 et 136).

On simplifiera l'épure en menant, par un point A fixé d'avance, les deux plans perpendiculaires aux droites d et d', car ce point appartiendra à l'intersection i des deux plans. De plus, si l'on prend le point A sur l'une des deux droites, sur la droite d par exemple, le plan parallèle à i et mené par d sera déterminé et il suffira, pour avoir la plus courte distance demandée, de mener par le point B

où la droite *d'* rencontre le plan (*d, i*), une parallèle à *i* jusqu'à son point de rencontre C avec la droite *d*. Enfin, en construisant dans un même plan horizontal et dans un même plan de front, respectivement les horizontales et les droites de front qui détermineront les deux plans perpendiculaires à *d* et *d'*, on aura facilement l'intersection de ces plans (n° 122, 3°).

Dans la figure 263, nous avons pris comme point A, un point de la droite *d*; (*1*, *2*) et (*3*, *4*) sont respectivement les plans menés par A, perpendiculairement à *d* et *d'*; *i* est l'intersection de ces deux plans et le point de rencontre B de *d'* avec le plan (*d*, *i*), a été obtenu au moyen d'un plan auxiliaire projetant verticalement la droite *d'*. La droite menée parallèlement à *i* par le point B, rencontre *d* au point C dont les projections doivent se trouver, comme vérification, sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. La distance demandée est BC et sa grandeur est déterminée en B'X.

EXERCICE XLV. — 296. Trouver sur une droite *d*, un point distant d'un point donné A, d'une longueur donnée. On amènera la droite *d* à être perpendiculaire à un plan de projection.

EXERCICE XLVI. — 297. Déterminer le rayon de la sphère circonscrite à un tétraèdre.

Il suffira de chercher la distance du centre de la sphère (nos 140 et 269) à l'un des sommets du tétraèdre.

EXERCICE XLVII. — 298. Déterminer la distance de deux droites parallèles ou de deux plans parallèles.

EXERCICE XLVIII. — 299. Construire un plan parallèle à un plan donné et qui en soit distant d'une longueur donnée.

EXERCICE XLIX. — 300. Déterminer le plan bissecteur du dièdre formé par deux plans donnés au moyen de l'intersection de ces plans et de l'intersection de deux plans équidistants des plans donnés.

On traitera en particulier le cas où les deux plans donnés sont respectivement vertical et debout (n° 315).

EXERCICE L. — **301.** Étant données une droite a, la projection horizontale b^h d'une seconde droite b et la projection horizontale p^h de la perpendiculaire commune à a et b, trouver les projections verticales des droites b et p et la grandeur de la plus courte distance entre a et b.

EXERCICE LI. — **302.** Étant donnés une droite a, la projection horizontale b^h d'une seconde droite b, la grandeur de la plus courte distance d entre les deux droites a et b, ainsi que le point X où la perpendiculaire commune rencontre la droite donnée a, trouver la projection verticale de la droite b et les deux projections de la perpendiculaire commune.

EXERCICE LII. — **303.** Déterminer les hauteurs d'un tétraèdre.

EXERCICE LIII. — **304.** Construire quatre plans parallèles équidistants, connaissant un point de chacun d'eux.

Il y a douze solutions.

EXERCICE LIV. — **305.** Construire quatre droites non situées dans un même plan, équidistantes et qui offrent une même perpendiculaire commune, connaissant un point de chacune d'elles, et un point de la perpendiculaire commune.

§ 3. DES GRANDEURS ANGULAIRES.

PROBLÈME XLV.

306. *On demande l'angle de deux droites.*

1° Supposons que les droites se coupent. Le problème sera résolu dans ce cas, si le plan des deux droites est parallèle à un plan de projection; et si le plan n'est pas placé de cette manière, on emploiera les rabattements, rotations et changements de plan de projection.

Soient (fig. 264) d et d' les droites données et S leur point de rencontre. Nous avons rabattu le plan (d, d') sur le plan horizontal ρ.

Le point S et les droites d et d' sont rabattus en S_r, d_r et d'_r. L'angle demandé est donné par d_r^h et d'^h_r.

Dans la figure 265, la droite d est horizontale et la droite d' est quelconque. Le plan (d, d') a été rabattu sur le plan horizontal contenant d. Le rabattement d'_r de la droite d' est déterminé par son point sur la charnière et le rabattement A_r du point A. L'angle demandé est donné par les droites d'^h_r et d^h.

Dans la figure 266, les droites AB et CD sont situées dans un même plan de profil; nous avons rabattu celui-ci sur le plan horizontal ρ contenant le point D.

Dans la figure 267, nous avons fait tourner le plan des droites d et d', autour d'un axe a mené verticalement par leur point d'intersection S, jusqu'à ce qu'une horizontale g du plan (d, d') soit perpendiculaire au plan vertical dans la position g'. Le plan (d, d') est alors debout et en l'amenant parallèlement au plan horizontal, par un rabattement autour de son horizontale g', nous aurons en Q l'angle demandé.

2° Si les deux droites ne se coupent pas, nous savons que leur angle est celui de deux parallèles menées par un point quelconque aux deux droites données.

a) On peut donc ramener ce cas au précédent.

b) Si les deux droites sont parallèles à un plan de projection, leur angle se projette sur le dernier plan en vraie grandeur, et l'on peut ramener à ce cas très simple, celui de deux droites quelconques, en amenant un plan parallèle aux deux droites à être parallèle à un plan de projection (n° 254).

c) Si l'une des droites est verticale, on pourra la considérer comme un axe autour duquel on fera tourner la seconde droite jusqu'à ce que celle-ci soit de front; l'angle demandé se projettera alors verticalement en vraie grandeur.

Ainsi dans la figure 268, la droite a est verticale, la droite b est quelconque. Nous avons fait tourner celle-ci autour de a, jusqu'à ce qu'elle soit de front en b_1; l'angle (a, b_1) ou φ se projette verticalement en vraie grandeur.

On pourra agir de même si l'une des droites est debout.

PROBLÈME XLVI.

307. *Déterminer l'angle d'une droite* d *et d'un plan* α.

On sait que cet angle est celui de la droite *d* et de sa projection sur le plan α. On cherchera donc l'intersection *i* du plan α et du plan mené perpendiculairement à α, par la droite *d* (nos 119 et 121); puis, on déterminera, comme dans le problème précédent, l'angle des droites *d* et *i*.

1° Si le plan donné était parallèle à un plan de projection, l'angle de ce plan et d'une droite quelconque se déterminerait très facilement. Dans la figure 269, nous avons déterminé l'angle de la droite *d* et du plan de front ρ, en rabattant sur ce dernier plan, le plan projetant *d* verticalement. On peut ramener un cas quelconque à ce cas très simple, grâce aux rotations et aux changements de plan de projection.

Ainsi (fig. 270), soit *d* la droite donnée et soit un plan déterminé par le point A et la droite de front *x*. Nous avons pris un axe de bout *a* et nous avons amené le plan (A, *x*) dans la position α_1, perpendiculaire au plan horizontal; φ est l'amplitude de la rotation et d_1 est la position nouvelle de *d*. Ensuite, nous avons pris un nouveau plan de projection V′ parallèle à α_1; la projection nouvelle de d_1 est $d_1^{v'}$. Enfin, pour avoir l'angle de d_1 avec α_1, nous avons rabattu sur le plan de front π, le plan projetant la droite d_1 sur le plan V′.

2° Si (fig. 271) le plan donné α était perpendiculaire à un plan de projection, par exemple au plan vertical, on aurait immédiatement le plan mené par *d* perpendiculairement à α et déterminé par *d* et par une perpendiculaire *p* à α; cette perpendiculaire est une droite de front. L'intersection *i* de α avec le plan (*d*, *p*), s'obtient très aisément et l'angle φ, de *i* et de *d*, peut s'obtenir par un rabattement sur le plan de front ρ contenant *p*, autour d'une charnière qui n'est autre que la perpendiculaire *p*.

On pourra ramener un cas quelconque à ce cas simple, en employant une rotation ou un changement de plan de projection.

3° Dans la figure 272, nous avons déterminé directement l'angle

du plan (1, 2) et de la droite d, sans déplacer la figure ni les plans de projection. Le plan mené par d, perpendiculairement au plan (1, 2) est déterminé par d et la perpendiculaire p menée au plan (1, 2), par le point M de d. L'intersection i, du plan (d, p) et du plan (1, 2), est déterminée en employant comme plans auxiliaires les deux plans π et ρ, menés respectivement par 1 et 2. Comme vérification, l'intersection i doit couper la droite d en un point S, sommet de l'angle qu'on demande, et la droite p en un point A. Enfin, l'angle de d et de i, c'est-à-dire l'angle demandé, a été obtenu en rabattant le plan (d, i) sur le plan horizontal ρ.

308. S'il n'y avait aucune utilité à déterminer la projection de la droite donnée sur le plan donné, on pourrait se contenter de déterminer l'angle que fait la droite avec une perpendiculaire au plan; on connaîtrait, de cette manière, le complément de l'angle demandé.

PROBLÈME XLVII.

309. *Déterminer l'angle de deux plans* α *et* β.

Nous savons que pour avoir cet angle, il suffit de mener, en un point S de l'intersection i des deux plans α et β, un troisième plan μ perpendiculaire à i; de déterminer les intersections i' et i'' de μ avec α et β, et de chercher l'angle des droites i' et i''. Nous appellerons *plan de la mesure*, le plan μ perpendiculaire à i.

1° Si (fig. 273) l'intersection i des plans α et β est perpendiculaire à un plan de projection, par exemple au plan horizontal, l'angle des plans donnés est nécessairement celui de leurs projections horizontales. On peut ramener à ce cas très simple, celui où les deux plans sont quelconques, au moyen des rotations et des changements de plan de projection.

Ainsi, dans la figure 274, l'un des plans est donné par la droite 1 et le point A; l'autre plan est déterminé par la droite 2 et le point B. Nous avons immédiatement un point de l'intersection i de ces deux plans, au point où la droite 1 rencontre la droite 2. Un second point de l'intersection a été déterminé au moyen d'un

plan auxiliaire horizontal passant par A. Grâce à un premier axe vertical a et à une rotation d'amplitude φ autour de cet axe, nous amenons la droite i, en i', dans le plan de front des droites 1 et 2; les points A et B des plans (1, A) et (2, B) vont se placer en A′ et B′. Au moyen d'une seconde rotation d'amplitude ψ, autour de l'axe debout a', on amène la droite i', en i'', perpendiculairement au plan horizontal; les points A′ et B′ vont, dans ce mouvement, se placer en A″ et B″ et les plans donnés occupent alors les positions α_1 et β_1 : leur angle est celui de leurs projections horizontales.

Dans la figure 275, l'un des plans est déterminé par le point A et la droite 1; l'autre plan est déterminé par le point B et la même droite 1 qui est donc l'intersection des deux plans. Combinons le plan V avec un nouveau plan de projection H′ perpendiculaire à V et parallèle à 1; soit ρ le plan de repère. La droite 1 a une projection $1^{h'}$ déterminée au moyen des points X et Y; les projections nouvelles des points A et B sont $A^{h'}$ et $B^{h'}$. Combinons maintenant le plan H′ avec un nouveau plan de projection V′ perpendiculaire à H′ et à 1; soit σ le plan de repère. Les projections nouvelles de 1, de A et de B sont $1^{v'}$, $A^{v'}$ et $B^{v'}$, et l'angle demandé est l'angle des projections V′ des plans donnés.

2° Si (fig. 276 et 277) l'intersection des plans (1, 2) et (1, 3) est parallèle à un plan de projection, par exemple au plan vertical, le plan μ de la mesure est perpendiculaire au plan vertical et les intersections du plan μ, avec les plans donnés, se déterminent facilement. L'angle des deux plans a été déterminé en rabattant le plan μ sur le plan horizontal ρ.

Dans la figure 278, nous avons déterminé l'angle d'un plan (1, A) avec le plan horizontal ρ.

Le cas de deux plans quelconques se ramène à celui des deux exemples précédents, où l'intersection des deux plans est parallèle à un des plans de projection; il suffit d'employer une rotation ou un changement de plan de projection. Ainsi (fig. 279), combinons avec le plan H, un nouveau plan de projection V′ perpendiculaire à H et parallèle à l'intersection XY ou i des plans (1, 2) et (3, 4). La nouvelle projection de i sera $i^{v'}$ et le plan μ, perpendiculaire à i au point S,

donnera l'angle des deux plans en le rabattant sur le plan horizontal par exemple.

Le procédé que nous venons d'indiquer est en général le meilleur.

3° On peut aussi déterminer directement l'angle de deux plans, sans déplacer la figure ni les plans de projection; il suffit d'exécuter les constructions indiquées au début de ce numéro.

Ainsi (fig. 280), soient (*1*, *2*) et (*3*, *4*) les plans donnés, i leur intersection, (*5*, *6*) le plan mené par S perpendiculairement à i, i' et i'' les intersections du plan de la mesure (*5*, *6*) avec les plans donnés. L'angle de i' et i'', a été déterminé en rabattant le plan (*5*, *6*) sur le plan de front des droites (*1*, *3* et *6*).

310. Faisons remarquer enfin, que l'angle de deux droites menées par un point S, perpendiculairement à deux plans, est la mesure de deux des quatre dièdres formés par les plans. On pourra se servir de cette propriété pour déterminer la grandeur de l'angle de deux plans, et l'on n'aura pas, dans cette méthode, à déterminer l'intersection des plans donnés, ce qui est quelquefois très avantageux. Ainsi (fig. 281), abaissons du point S les deux perpendiculaires p et p', sur les plans (*1*, *2*) et (*3*, *4*); rabattons le plan (p,p') sur le plan horizontal ρ; l'angle φ formé par les rabattements p_r et p_r' des droites p et p', donne la mesure de deux des quatre dièdres formés par les plans donnés.

EXERCICE LV. — **311**. Trouver la bissectrice de l'angle de deux droites.

EXERCICE LVI. — **312**. Deux droites qui se coupent étant données, trouver sur une droite non située dans leur plan et qui ne les rencontre pas, un point également distant de ces deux droites.

EXERCICE LVII. — **313**. Mener, par un point, une droite rencontrant une droite donnée sous un angle donné.

EXERCICE LVIII. — **314**. *Par un point donné* A (fig. 282), *mener une droite faisant un angle* φ *avec un plan horizontal et un angle* ψ *avec un plan de front* (n° 333).

Faisons tourner la droite inconnue d autour d'un axe a mené

verticalement par A, jusqu'à ce qu'elle soit parallèle au plan vertical, dans la position d_1. La projection verticale d_1^v fera alors un angle φ avec une parallèle à la ligne de terre, et la droite d_1 sera déterminée. Pour la remettre dans sa position primitive *d*, il suffira d'en faire tourner un point tel que B_1, dans le plan horizontal ρ.

Pour montrer l'angle que fait la droite demandée avec un plan de front, faisons-la tourner autour d'un axe *a'* projetant verticalement le point A, jusqu'à ce qu'elle soit dans la position d_2, parallèle au plan horizontal. La projection horizontale d_2^h fera alors un angle ψ avec une parallèle à la ligne de terre, et la droite d_2 sera déterminée. Pour la remettre dans sa position primitive *d*, il suffira de faire tourner un point tel que B_2; mais nous prendrons comme point B_2 précisément la nouvelle position du point qui dans la rotation de la droite *d* autour de *a*, s'est placé en B_1; c'est-à-dire que nous prenons $B_2^hA^h = B_1^vA^v$. Le point B_2, en reprenant sa position, doit se placer dans le plan ρ, en un point B où viendra aussi se replacer le point B_1. Le point B étant déterminé, la droite demandée est connue.

Remarque I. — Supposons les angles φ et ψ aigus. Pour que le problème soit possible, il faut que l'arc décrit par B_2 coupe le plan ρ, c'est-à-dire que $B_2^vA^v$ soit plus grand que A^vI. Or, $B_2^vA^v = KA^h = A^hB_2^h \cos\psi$, et $A^vI = B_1^vA^v \sin\varphi$.

Donc, $A^hB_2^h \cos\psi > B_1^vA^v \sin\varphi$, et comme $A^hB_2^h = B_1^vA^v$, on a $\cos\varphi > \sin\varphi$, ou $\sin(90°\text{-}\psi) > \sin\varphi$, ou $90°\text{-}\psi > \varphi$, ou $\varphi + \psi < 90°$.

Remarque II. — Nous verrons dans l'étude des surfaces, comment on peut mener par un point, une droite faisant avec deux plans quelconques, respectivement les angles φ et ψ.

EXERCICE LIX. — 315. Construire le plan bissecteur de l'angle formé par deux plans.

Si les plans donnés étaient respectivement vertical et debout, on aurait avantage à prendre la solution indiquée au numéro 300.

Dans tout autre cas, on pourra ramener les données à celles du cas précédent, au moyen de rotations ou de changements de plan de

projection; ou bien, il faudra construire la bissectrice de l'angle de mesure du dièdre formé par les plans donnés.

EXERCICE LX. — 316. Par une droite d, prise dans un plan α, mener un plan faisant avec le plan α un angle donné.

EXERCICE LXI. — 317. Déterminer l'intersection de deux plans, sachant que chacun d'eux contient une horizontale donnée et fait un angle connu avec un plan horizontal.

EXERCICE LXII. — 318. Connaissant les traces de deux plans sur un plan horizontal connu, l'angle de ces deux plans et la projection horizontale de leur intersection, on demande la projection verticale de cette intersection.

EXERCICE LXIII. — 319. *Mener, par une droite* d, *un plan* α *faisant un angle donné* φ *avec un plan horizontal* (fig. 283).

Faisons tourner le plan demandé α autour d'un axe a mené verticalement par un point A de d, jusqu'à ce que α soit, dans la position α_1, perpendiculaire au plan vertical. Le plan α ne cessera pas de passer par le point A et après la rotation, sa projection verticale d_1^v passera par A^v et fera l'angle φ avec une parallèle à la ligne de terre. L'amplitude ω dn mouvement sera déterminée par la rotation d'un point B, pris sur la droite d du plan α, et dont la position nouvelle est B_1.

Pour déterminer le plan α dans sa position primitive, il suffira de faire tourner en sens inverse et de l'amplitude ω, un point tel que C_1, pris dans α_1, hors de la droite AB_1. Le plan (d, C) sera le plan demandé.

Remarque I. — Supposons que l'angle φ soit aigu et désignons par ψ l'angle aigu de la droite d avec un plan horizontal. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la droite $B_1^v B_1^h$ coupe le cercle de rayon $A^h B^h$, c'est-à-dire que $IB_1^v \overline{\overline{<}} A^h B^h$. Or, $IB_1^v = \frac{A^v I}{tg\, \varphi}$ et $A^h B^h = \frac{A^h I}{tg\, \psi}$; donc il faut et il suffit que $tg\, \psi \overline{\overline{<}} tg\, \varphi$, ou $\psi \overline{\overline{<}} \varphi$, ou $\psi \overline{\overline{<}} \varphi \overline{\overline{<}} 90°$.

Remarque II. — Nous verrons dans l'étude des surfaces, comment on peut mener par une droite, un plan α faisant avec un autre plan quelconque β un angle donné φ, alors même que le plan β ne serait ni horizontal ni debout et que l'on ne voudrait déplacer, au préalable, ni la figure, ni les plans de projection.

EXERCICE LXIV. — **320.** *Par un point donné* A, *mener un plan* α *faisant un angle* φ *avec un plan horizontal et un angle* ψ *avec un plan de front* (fig. 284).

En faisant tourner le plan α autour d'un axe vertical mené par A, on pourra l'amener dans une position α_1 perpendiculaire au plan vertical; cette position sera connue, attendu que α_1^v devra passer par A^v et faire l'angle φ avec une parallèle à la ligne de terre. En faisant ensuite tourner le plan α autour d'un axe a', perpendiculaire au plan vertical et rencontrant l'axe a en un point X, on pourra amener le plan α à être vertical, dans une position α_2 qui sera connue, attendu que α_2^h devra faire l'angle ψ avec une parallèle à la ligne de terre et devra être distante de X^h, d'une longueur égale à la distance d de α_1^v à X^v. Cette longueur d mesure la distance du plan α au point X de rencontre des axes. Mais dans la rotation autour de l'axe a', le point A du plan α décrit un arc de cercle dont les projections horizontale et verticale sont connues et se place en A_1, dans le plan α_2; l'amplitude de la rotation est donc ω et en faisant tourner dans le sens inverse, de l'angle ω, une droite x_1 du plan α_2, jusqu'en x, nous aurons une droite x du plan α. Le plan demandé sera donc le plan (x, A).

Remarque I. — Supposons que les angles φ et ψ soient aigus.

Dans ce cas, pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que $A^hA_1^h \stackrel{=}{<} A^hA^v$, ou que $\frac{d}{\sin \psi} \stackrel{=}{<} \frac{d}{\cos \varphi}$. Donc, $\cos \varphi \stackrel{=}{<} \sin \psi$, ou $\sin (90^\circ - \varphi) \stackrel{=}{<} \sin \psi$. Dès lors, il faut et il suffit que $90^\circ - \varphi \stackrel{=}{<} \psi$, ou $\varphi + \psi \stackrel{=}{>} 90^\circ$.

Remarque II. — Cet exercice n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général que l'on rencontre dans l'étude des surfaces.

EXERCICE LXV. — **321.** *Déterminer le centre et le rayon d'une sphère inscrite dans un tétraèdre.*

Soit (fig. 285) SABC le tétraèdre donné et supposons que la base soit placée dans un plan horizontal α. Le centre de la sphère inscrite est le point commun aux plans bissecteurs des dièdres du tétraèdre.

Pour construire le plan bissecteur du dièdre AB, nous avons mené par S un plan perpendiculaire à l'arête AB; ses intersections avec les deux faces du dièdre déterminent la mesure de cet angle. Nous avons, par une rotation autour de l'axe vertical *a* mené par le point S, amené le plan de la mesure à être parallèle au plan vertical, ce qui permet de construire la bissectrice de l'angle donnant la grandeur du dièdre AB. Nous avons construit de même, les bissectrices des angles mesurant les dièdres AC et BC.

Par des rotations inverses, on pourrait donner à ces bissectrices les positions qu'elles occupent dans les plans de mesure et les plans bissecteurs des trois dièdres AB, AC et BC seraient déterminés. Pour trouver les intersections de ces plans bissecteurs pris deux à deux, coupons-les par un plan horizontal auxiliaire π; on obtiendra dans les plans bissecteurs, les intersections i, i' et i'', dont les points de rencontre déterminent, avec les points A, B et C, trois droites se rencontrant en un point unique O, centre de la sphère inscrite.

Le rayon de la sphère est égal à la distance du point O à l'une des faces du tétraèdre, il est donc égal à la hauteur du point O au-dessus du plan α.

Si le tétraèdre donné n'a pas sa base dans un plan parallèle à un plan de projection, on pourra, par des rotations ou des changements de plan de projection, ramener ce cas général à celui que nous avons traité dans la figure 285.

§ 4. RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES TRIÈDRES.

But. — **322.** Dans un angle trièdre on peut considérer trois faces, *a*, *b*, *c* et trois dièdres; nous désignerons par A, B et C les dièdres respectivement opposés aux faces *a*, *b* et *c*. On démontre en géométrie :

1° Que la somme des faces *a*, *b*, *c* est moindre que quatre droits

et que la plus grande de ces faces est plus petite que la somme des deux autres; ces conditions sont nécessaires et suffisantes;

2° Que la somme des dièdres, A, B, C est comprise entre deux et six droits et que le plus petit des dièdres, augmenté de deux droits, est plus grand que la somme des deux autres; ces conditions sont encore nécessaires et suffisantes;

3° Qu'étant données trois quelconques des six grandeurs *a*, *b*, *c*, A, B, C, il existe en général, des valeurs pour les trois autres grandeurs.

C'est dans la détermination graphique de trois des six éléments *a*, *b*, *c*, A, B, C, en fonction des trois autres, que consiste la résolution graphique des trièdres.

Différents cas. — 323. On peut donner dans un trièdre :
1° Les trois faces,
2° Deux faces et le dièdre compris par ces faces,
3° Deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles,
4° Une face et les dièdres adjacents,
5° Une face, un dièdre adjacent et le dièdre opposé à la face,
6° Les trois dièdres.

Nous voyons donc qu'il y a à examiner six cas distincts; mais les trois derniers cas peuvent se ramener aux trois premiers. En effet, en prenant les suppléments des angles donnés dans le 4°, le 5° et le 6°, ces suppléments donnent trois éléments du trièdre supplémentaire qu'on résoudrait comme il sera dit pour les trois premiers cas. Les suppléments des angles trouvés, dans ce trièdre supplémentaire, donneraient les angles inconnus du trièdre proposé.

PROBLÈME L.

324. *Étant données les trois faces* a, b, c, *d'un trièdre* S, *chercher les dièdres* A, B *et* C (fig. 286).

Plaçons la face *a* dans un plan de front et supposons que les faces adjacentes *b* et *c* soient rabattues sur ce plan. Un point quelconque P de l'arête d'intersection des faces *b* et *c*, considéré comme appartenant à la face *b*, sera rabattu en un certain point $P_{\prime}$, et considéré comme appartenant à la face *c*, il sera rabattu en un point $P_{\prime\prime}$

tel que $SP_r = SP_{1r}$; il s'ensuit qu'en relevant les points P_r et P_{1r}, on trouvera facilement la projection verticale du point P, à la rencontre des projections verticales des plans dans lesquels se meuvent P_r et P_{1r} (n° 257).

Le plan du mouvement du point P_r est aussi le plan de la mesure du dièdre C; si nous rabattons ce plan sur le plan de front, le point P se rabattra en P_{2r}, sur une perpendiculaire à la projection verticale de la charnière, à une distance du point I égale à $P^v_r I$: dès lors, le dièdre C sera connu. On cherchera de même l'angle B et comme vérification, on aura $P^v P^v_{2r} = P^v P^v_{3r}$.

Enfin, le plan mené par P perpendiculairement à l'arête SP, donnera l'angle A. Il coupe les faces suivant les droites PX et PY, perpendiculaires à SP, et rabattues en $P_r X$ et $P_{1r} Y$. Si nous le rabattons sur le plan de front, autour de la charnière XY dont la projection verticale doit être comme vérification, perpendiculaire à $S^v P^v$, le point P ira se rabattre en P_{4r}, sur la perpendiculaire $S^v P^v$ à la charnière, à des distances de X^v et de Y^v, égales respectivement à $P^v_r X^v$ et $P^v_{1r} Y^v$: l'angle A sera par conséquent connu.

PROBLÈME LI.

325. *Étant donnés, dans un trièdre, les deux faces* a *et* b *et l'angle compris* C, *on demande de résoudre le trièdre* (fig. 286).

Plaçons la face *a* dans un plan de front et rabattons, sur ce plan, la face *b*. Le point P_r, rabattement d'un point P de l'arête d'intersection des faces *b* et *c*, se relèvera dans un plan perpendiculaire à la charnière, sur l'intersection du plan du mouvement avec le plan de la face *b*. Cette intersection, après le rabattement sur le plan de front, du plan du mouvement, fera avec la charnière, l'angle C et le point P, dans ce rabattement auxiliaire, se placera en P_{2r}, à une distance du point I égale à IP^v_r; nous en concluons la projection P^v du point P et par suite, la projection de la troisième arête du trièdre.

La face *c* se déterminera maintenant avec facilité, par un rabattement, et les dièdres B et A se trouveront comme dans le problème précédent.

PROBLÈME LII.

326. *Connaissant, dans un trièdre, deux faces* a, b *et l'angle* A *opposé à l'une d'elles, on demande de résoudre le trièdre* (fig. 287).

Plaçons la face b dans un plan de front β de manière que l'arête du dièdre A soit perpendiculaire au plan horizontal (n° 40). Soit γ le plan de la face c et rabattons sur le plan β, le plan de la face a. Le point P_r, rabattement d'un point P de l'arête d'intersection des faces a et c, se relèvera dans un plan perpendiculaire à la charnière, sur l'intersection i du plan γ et du plan μ du mouvement. Si nous rabattons le plan μ sur le plan β, le point P se placera donc en P_{1r} ou P_{2r}, à la rencontre des rabattements de i et de la circonférence décrite par P_r dans le plan μ. Nous en concluons la projection P^{r} ou P'^{r} du point P et, par suite, la projection de la 3ᵉ arête du trièdre.

La face c se déterminera facilement par un rabattement, et les dièdres B et C se trouveront comme dans le problème du numéro 226.

Remarque. — Lorsque le rabattement de la circonférence décrite par P_r ne coupe pas, au-dessus de la charnière, le rabattement de l'intersection i du plan du mouvement de P_r avec le plan de la face c, alors le problème n'aura pas de solution. Il y aura une ou deux solutions, quand la circonférence touchera ou coupera l'intersection au-dessus de la charnière. Dans la figure 287, le problème présente deux solutions.

EXERCICE LXVI. — 327. *Résoudre le trièdre dans lequel on connaît une face* a *et les dièdres adjacents* B *et* C, *sans employer le trièdre supplémentaire* (fig. 288).

Plaçons la face a dans un plan de front α, de manière que l'arête du dièdre B soit perpendiculaire au plan horizontal. Soit γ le plan de la face c. Il faut mener, par l'arête du dièdre C, un plan faisant avec le plan de front l'angle C et en chercher l'intersection avec le plan γ. Rabattons sur le plan α, un plan perpendiculaire à l'arête du

dièdre C; dessinons en rabattement, l'intersection de ce plan avec le plan de la face *b* et relevons, en N, le point N_r de cette intersection rabattue. Nous obtiendrons ainsi une génératrice *g* du plan de la face *b* et l'intersection SP de ce dernier plan avec le plan γ, sera l'arête inconnue du trièdre S.

On déterminera dès lors, sans difficulté, les éléments inconnus du trièdre.

EXERCICE LXVII. — 328. *Résoudre le trièdre connaissant une face* a, *un dièdre adjacent* B *et le dièdre* A *opposé à la face* a, *sans employer le trièdre supplémentaire.*

Plaçons (fig. 289) le plan de la face inconnue *c* dans un plan de front γ, de manière que l'arête du dièdre B soit perpendiculaire au plan horizontal. Soit α le plan de la face *a* et rabattons-le sur le plan γ. Relevons ensuite le point M_r de l'arête du dièdre C, ce qui nous donne les projections de cette arête. Il nous restera à mener, par l'arête SM, un plan β faisant avec le plan de front l'angle A (nº 319). A cet effet, nous avons fait tourner le plan β, autour de l'axe debout *d* mené par le point M de l'arête du dièdre C, jusqu'à ce que β se trouve dans la position β_1, perpendiculaire au plan horizontal. Le plan β n'aura pas cessé de passer par le point M et sa projection horizontale β_1^h, après la rotation, passera par M^h et fera l'angle A avec une parallèle à la ligne de terre. La droite de front passant par le point S dans le plan de la face *b*, se trouvera dans sa nouvelle position, en g_1. De la position g_1, on déduira aisément la position primitive *g* : on aura ainsi la troisième arête du trièdre, dont les éléments inconnus se détermineront maintenant avec facilité.

EXERCICE LXVIII. — 329. *Résoudre un trièdre, connaissant les trois dièdres* A, B *et* C, *sans employer le trièdre supplémentaire.*

Si l'on considère les plans des faces comprenant le dièdre A, il faudra, pour résoudre le problème, commencer par mener par un point de l'arête du dièdre A, un plan faisant des angles connus B et C avec les plans des faces *c* et *b*. Nous avons résolu ce problème dans le cas où le dièdre A est droit (nº 320), mais l'on ne peut en donner une bonne solution générale et rationnelle, qu'après l'étude des surfaces.

PROBLÈME LIII.

330. *Réduire à l'horizon un angle donné* a.

Ce problème a pour but de déterminer la projection horizontale d'un angle a dont les côtés font, avec la verticale menée par le sommet, des angles connus b et c.

Or, si l'on imagine un angle trièdre ayant comme arêtes la verticale et les deux côtés de l'angle a, la réduction à l'horizon de l'angle a sera l'angle qui mesurera dans ce trièdre dont on connaît les trois faces, l'angle dièdre A compris entre les deux faces verticales. Ce problème rentre donc dans celui du n° 324 et se résout de la même manière.

EXERCICE LXIX. — **331.** Par un point donné M, mener une droite qui fasse avec deux droites données d et d', des angles donnés.

Si l'on mène par le point M, des parallèles aux droites d et d', le problème revient à chercher la troisième arête d'un trièdre dont on connaît deux arêtes et les trois faces (n° 324).

EXERCICE LXX. — **332.** Mener une droite s'appuyant sur deux droites données d et d', et faisant avec ces droites des angles respectivement égaux à des angles donnés.

EXERCICE LXXI. — **333.** Mener, par un point donné M, une droite qui fasse un angle φ avec un plan horizontal et un angle ψ avec un plan de front (n° 314).

On peut résoudre le problème en menant par le point M, une droite faisant avec les droites projetant le point, des angles complémentaires de φ et de ψ (n° 331). On en conclut facilement (n° 322, 1°) que la somme $\varphi + \psi$ doit être plus petite que 90°.

APPENDICE A.

Prescriptions à observer pour l'exécution des épures.

1. **Fausses manches.** — Les élèves seront possesseurs de deux paires de fausses manches de couleur claire. Ils ne pourront jamais travailler à leurs épures, sans être porteurs d'une de ces deux paires en parfait état de propreté.

2. **Planches et cartons à dessiner.** — Les planches à dessiner seront soigneusement soustraites à l'action prolongée de la chaleur, de l'humidité, ou des rayons solaires. Pendant les intervalles qui séparent les séances graphiques, elles seront enfermées dans de grands portefeuilles et placées contre une cloison verticale bien sèche, de manière à laisser l'air circuler alentour.

On veillera toujours à ne pas détériorer les arêtes des planches, par des chocs contre d'autres objets.

Les cartons à dessiner utilisés à l'Ecole Militaire n'exigent pas des précautions aussi minutieuses que celles qui sont signalées pour les planches à dessiner. Pendant les intervalles qui séparent les séances, ces cartons enfermés dans des portefeuilles, sont déposés à plat dans des armoires spécialement destinées à cet usage.

3. **Papier à dessiner.** — Sauf ordre contraire, les élèves se serviront exclusivement du papier grand-aigle portant dans la pâte la marque « *Original Turkey Mill Kent* ».

Le recto se reconnaît au grain plus fin et correspond au côté d'où l'on peut lire la marque par transparence.

4. **Premières recommandations.** — En dessinant, on évitera d'appuyer le buste sur le papier, afin que les boutons et les chaînes de montres ne produisent sur les dessins, des empreintes qui les détériorent.

On aura soin de ne jamais laisser le papier dépasser la planche ou le carton, sinon la moindre pression sur les arêtes produit dans le papier, des plis qu'on ne parvient que difficilement à faire disparaître.

5. **Toile à l'éméri.** — L'élève sera possesseur d'une feuille de toile à l'éméri n° 0. Il en découpera un rectangle, de $0^m10 \times 0^m05$, qu'il pliera, de manière à obtenir un carré de $0^m05 \times 0^m05$.

Ce dièdre se trouvera constamment à la portée de la main, sur le pupitre, sous la pochette de compas.

6. Porte-mine. — Les élèves se serviront du porte-mine *Gilbert et Cie* et de petits porte-mine placés dans les pochettes de compas.

Avant de se servir d'un porte-mine, on s'assurera si la mine qu'il doit recevoir, peut y être solidement fixée. Lorsque l'instrument présentera un défaut sous ce rapport, on enlèvera la mine et on vissera le capuchon à fond : si les lames intérieures, destinées à serrer la mine, affleurent alors ou dépassent le bord libre du capuchon, le porte-mine doit être refusé ; dans le cas contraire, il suffit généralement, pour ameliorer l'instrument, d'user, sur la toile à l'éméri, l'extrémité filetée du capuchon, de manière à faire affleurer l'autre extrémité et les lames intérieures.

7. Mines de graphite. — On se servira, pour le dessin au crayon, de mines *Gilbert et Cie HHH.*

Pour exécuter avec précision, un dessin au crayon, il est indispensable de faire à celui-ci une pointe fine et allongée. On y parvient rapidement de la manière suivante: on fixe la mine dans le porte-mine *Gilbert*, en la laissant sortir d'environ $0^{m}012$; à l'aide du pouce et de l'index de la main gauche, on appuie le rectangle de toile à l'éméri sur le bord du pupitre ; ensuite, on use l'extrémité de la mine, en lui donnant la forme d'un cône d'environ $0^{m}006$ de hauteur.

Pour donner le fini à la pointe, on pliera le rectangle de toile à l'éméri en carré de $0^{m}05 \times 0^{m}05$; à l'aide du pouce et de l'index de la main gauche, on serrera la pointe entre les faces du dièdre ainsi formé, et à l'aide de la main droite, on imprimera à la mine un mouvement de rotation alternatif.

Afin de ne pas détériorer le porte-mine, on laissera toujours, entre le capuchon de celui-ci et la toile à l'éméri, une distance suffisante.

Pour faire des pointes aux mines des compas, on pourra les placer provisoirement dans le porte-mine *Gilbert.*

On aura soin de ne pas appuyer sur le crayon, pour tracer les lignes. Celles-ci devront être à peine visibles, et disparaître par un léger frottement à la gomme élastique.

8. Règles. — Pour tracer, à l'aide de la règle, une droite au crayon, on place la pointe de celui-ci sur l'arête du dièdre formé par la règle et le papier, comme l'indique la figure 290 et non comme l'indiquent les figures 291 et 292.

Il suffira de borner l'action de la main au maintien de la pointe du crayon contre l'arête de la règle.

On se contente parfois, de presser la règle sur le papier à une seule place. Cette manière de faire donne de mauvais résultats aux endroits éloignés de celui où s'exerce la pression ; car, en ces endroits, la pointe du crayon pénètre sous la règle, en soulevant celle-ci, et trace une ligne courbe, s'écartant sensiblement de l'arête de la règle. Il faudra donc, autant que la chose est nécessaire, faire suivre le mouvement de la main qui trace, par la main dont la pression maintient la règle sur le papier.

Avant de se servir d'une règle, pour le dessin géométrique, on aura soin de vérifier, de la manière connue, la rectitude des arêtes, et dès que la règle sera reconnue bonne, on la signera à l'encre. A partir de ce moment, la règle sera toujours placée, soit sur le papier, soit sur le pupitre, de manière que la signature soit visible.

Les règles se couvrent, par l'usage, d'une couche de graphite provenant des

traits au crayon, et deviennent ainsi une cause de malpropreté pour les dessins. On aura donc soin de nettoyer fréquemment ces objets, soit à l'aide d'une gomme blanche, soit à la mie de pain.

9. Équerres et tracé des parallèles. — Dans le dessin géométrique, on fait usage de plusieurs espèces d'équerres : les équerres allongées, les équerres à 60°, les équerres à 45°, etc..

Les équerres allongées servent généralement pour le tracé des droites parallèles.

La mise en usage d'une équerre devra être précédée de la vérification soigneuse de la rectitude des arêtes et de la grandeur des angles. Dès que l'équerre sera reconnue bonne, on la signera à l'encre. A partir de ce moment, l'équerre sera toujours placée, soit sur le papier, soit sur le pupitre, de manière que la signature soit visible.

La recommandation finale, relative à la propreté des règles, s'applique également aux équerres.

L'orsqu'on devra mener à différentes reprises, des droites parallèles à une même direction, on partira toujours, avec le bord de l'équerre, de la même droite, de cette manière, les erreurs ne peuvent s'accumuler dans le tracé des parallèles.

10. Compas et tracé des circonférences. — Pour diviser un arc de cercle en parties égales, on se servira avec avantage, du compas de division dit *à cheveu*.

Pour le tracé d'une circonférence de rayon très petit, on emploiera exclusivement le compas à balustre.

En prenant une distance avec le compas, on évitera toujours avec soin de prendre des ouvertures de compas, telles que les branches fassent des angles trop petits avec la droite qui en joint les extrémités.

Pour piquer, avec la pointe d'un compas, un point sur un dessin, on dressera la pointe normalement au papier et on exercera ensuite une légère pression. Pour rendre le point piqué bien visible, on l'entourera d'une petite circonférence dessinée au crayon, à main levée.

Pour tracer un arc de cercle, on piquera d'abord le centre et un point de la courbe, à moins que ces points ne soient donnés chacun par l'intersection de deux lignes déjà tracées. On placera au centre, la pointe qui dans l'aiguille mobile du compas, présente un épaulement destiné à limiter la pénétration dans le papier. On tiendra le compas par la tête sans exercer aucune pression sur les branches et l'on aura soin de disposer et de manier l'instrument, de façon que les extrémités des branches soient perpendiculaires au papier pendant le tracé.

Lorsqu'on devra tracer plusieurs circonférences concentriques, on appliquera sur le papier, à l'endroit du centre, un petit cercle en corne transparente, appelé *clou à centrer*.

11. Doubles décimètres. — Les éleves possèderont chacun un double décimètre en buis. Cet instrument sera employé pour prendre des distances données en fractions décimales du mètre.

Avant de s'en servir, on vérifiera la rectitude des arêtes; puis, on prendra une ouverture de compas d'un certain nombre de millimètres et on la portera à différents endroits sur l'instrument. Si la concordance est parfaite, la division est exacte.

En général, c'est à l'aide du compas à pointes sèches qu'une mesure doit être prise sur le double décimètre.

12. Rapporteurs. — La vérification d'un rapporteur doit porter sur plusieurs points.

On vérifiera d'abord l'exactitude de la graduation, comme pour le double décimètre; puis, on vérifiera la forme circulaire du bord courbe, la rectitude de l'autre bord MN (fig. 293), et le parallélisme entre celui-ci et la ligne de foi (0-180) ou (0-200)

Pour mener, par un point A, une droite faisant avec une droite AB un angle donné, on placera l'instrument comme l'indique la figure et on tracera le côté de l'angle, le long du bord MN.

13. Pistolets. — Pour tracer, au crayon, une courbe au moyen du pistolet, on sera généralement obligé de le faire par parties.

On dessinera toujours de gauche à droite, et l'on fera en sorte que le bord du pistolet coïncide toujours avec une partie déjà tracée de la courbe.

Lorsqu'une même courbe se reproduit souvent, il est avantageux de construire un pistolet spécial, ou *gabarit.*

Pour faire un gabarit, on en dessinera le contour au crayon sur une feuille de bois; on découpera ensuite celle-ci avec un canif bien tranchant et l'on donnera le fini à l'objet, en frottant le bord avec la toile à l'éméri.

Si le gabarit doit servir à tracer une courbe à l'encre, on tiendra compte de la distance, qui, dans la mise à l'encre, devra exister entre le bord du gabarit et l'axe de la ligne à tracer (n° 17).

La recommandation finale relative à la propreté des règles, s'applique aussi aux pistolets.

14. Recommandations générales. — Avant de commencer une épure, on lira attentivement le programme. Puis on indiquera, mentalement ou par écrit, les solutions de tous les problèmes à résoudre, sans néanmoins entrer dans les détails d'exécution.

L'étude préliminaire étant faite, on commencera le dessin.

On tracera d'abord deux perpendiculaires divisant la feuille de papier en quatre rectangles égaux. A cet effet, on emploiera la construction connue, à l'aide d'arcs de cercles. Puis on dessinera le trait fin du cadre et les données indiquées au programme (Appendices B et C). Ensuite, on dessinera entièrement l'épure au crayon.

Le dessin au crayon étant entièrement terminé, on le nettoiera avec un résidu provenant de la fabrication des gants de peau blanche, appelé *dolage.*

15. Flèches. — Avant de passer à la mise à l'encre d'une épure, on dessinera soigneusement, au crayon, les flèches indiquant les rabattements, les rotations et les directions des projections des rayons lumineux parallèles. On se conformera à cet effet aux indications suivantes :

1° ***Flèches pour les rabattements et les directions des projections des rayons lumineux parallèles*** (fig. 295).

OA = 1 unité.
OE = 1/4 d'unité.
OB = 2 unités.
OL = 4 unités.
OD = 6 unités.
OK = 7 unités.

Les lignes AB, CD et EF sont parallèles et la flèche est symétrique par rapport à OK.

Pour les rabattements, la longueur totale de chaque flèche sera de 0^m014.

Pour les rayons lumineux, la longueur de la flèche sera de 0^m035.

Dans la mise à l'encre, les barbes des flèches seront dessinées à l'aide de la règle à hachures (n° 18).

2° *Flèches pour les rotations* (fig. 294).

Le corps de la flèche courbe sera figuré au moyen d'une demi-circonférence *1*, dont le centre est en *1'*, au milieu d'une longueur AB, choisie arbitrairement; la pointe sera figurée au moyen de deux arcs de cercle *2* et *3*, dont les centres *2'* et *3'* sont respectivement au point milieu de *1'* B et au point A. Les arcs *2* et *3* seront limités à deux points distants de la pointe B, d'une longueur égale au quart de AB.

16. Encre de Chine. — Pour la mise des dessins à l'encre noire, on se servira d'encre de Chine liquide. Chaque bouteille sera placée, dans un grand verre, sur le pupitre.

On introduira l'encre dans le tire-ligne à l'aide d'une plume d'oie. Cette plume sera serrée dans un bouchon en caoutchouc, de manière à la faire plonger dans l'encre à la profondeur voulue.

17. Tire-lignes. — Pour se servir d'un tire-ligne, on commencera par donner aux lames l'écartement prescrit au programme de l'épure. Ensuite on y mettra l'encre à l'aide de la plume d'oie. On aura toujours soin de mettre de l'encre en quantité suffisante, pour que le tire-ligne trace le trait, sans qu'on doive presser l'instrument sur le papier.

Lorsque le tire-ligne renferme trop d'encre, on fait inévitablement des taches sur le dessin; si l'on présume qu'il en est ainsi, on tient le tire-ligne au-dessus du goulot de la bouteille, et on lui imprime une légère secousse : l'encre en excès tombe dans la bouteille.

Pour tracer au tire-ligne un trait bien régulier, il faut :

1° Que les deux branches du tire-ligne reposent (fig. 298) simultanément sur le papier, sinon le trait présente (fig. 296 et 297) des arrachements du côté où la lame ne touche pas le papier.

2° Que la vis, réglant l'écartement des lames, ait son axe perpendiculaire à l'arête de la règle; sinon, le trait commencerait et finirait mal et de plus, on serait exposé à avoir un trait d'inégale épaisseur. On placera toujours la tête de la vis du côté opposé au dessinateur.

3° Qu'aucune pression du tire-ligne contre la règle, ne puisse en rapprocher les branches, et produire un trait d'inégale épaisseur.

4° Que le tire-ligne soit toujours incliné du même angle sur le papier, de manière à obtenir un trait rectiligne, à une distance uniforme du bord de la règle. Il est, à cet effet, prescrit de tenir toujours le tire-ligne normalement au papier.

Le trait à l'encre sera toujours tracé de manière à avoir son axe confondu avec le trait au crayon. A cet effet, on placera le bord de la règle à une certaine distance du trait au crayon, parallèlement à celui-ci. Pour obtenir le parallélisme entre le bord et le trait, on placera le bord supérieur de la règle dans le plan déterminé par l'œil droit et le trait au crayon.

Lorsque le tire-ligne ne tracera pas le trait, par son simple contact avec le papier, on augmentera la quantité d'encre que l'instrument renferme. Si cela ne suffit pas, on devra en conclure la présence de grumeaux entre les lames de l'instrument, et on essuiera celui-ci avant de continuer le travail.

On peut, à l'aide du tire-ligne, dessiner aussi des points à l'encre. Dans cette opération surtout, il est nécessaire de charger suffisamment l'instrument, et d'empêcher la présence de grumeaux ou de poussière entre les lames.

Pour faire un point, on devra se contenter de toucher le papier, à l'endroit voulu, avec le tire-ligne. On maintiendra l'instrument en contact avec le papier, jusqu'à ce que l'encre se soit écoulée en quantité suffisante pour former un beau point circulaire. Si le point ne se forme pas, il est inutile de presser sur l'instrument, ou de lui imprimer un mouvement de rotation autour de son axe : la première manœuvre donne, au lieu de points, des figures semblables à des coupes faites dans des lentilles biconcaves ; la seconde donne des points de diamètre trop grand.

On ne peut, à l'aide d'un tire-ligne ordinaire, tracer des traits dont l'épaisseur dépasse $0^{m}001$. Pour obtenir des traits plus épais, on en dessine préalablement, au crayon, les deux bords parallèles. On remplit l'intervalle entre les deux traits au crayon à l'aide de plusieurs traits à l'encre d'épaisseur moindre. Le trait du milieu doit être tracé en dernier lieu avec un tire-ligne bien chargé. Pour éviter de faire des taches dans cette dernière opération, on se sert d'une règle biseautée, ou de deux règles superposées dont l'inférieure est suffisamment en retraite sur l'autre.

Dans le dessin à l'encre, on dessine fréquemment des traits interrompus séparés ou non par un ou plusieurs points. Chacun des traits interrompus aura environ $0^{m}0045$ de longueur, et chacun des intervalles, entre deux traits, entre un point et un trait, ou entre deux points, aura environ $0^{m}0005$.

Pour obtenir de l'uniformité dans le dessin des traits interrompus, on pourra se servir d'une règle portant, sur ses bords, quatre graduations dont les divisions sont équidistantes respectivement de 5, 6, 7 et 8 millimètres. La première graduation servira au tracé des traits interrompus et les trois autres serviront au tracé des traits interrompus séparés, respectivement, par un, deux et trois points.

18. **Hachures.** — Les hachures sont tracées à l'aide d'une règle et d'une équerre spéciales fournies par l'École militaire. Le mécanisme en est simple et se comprend à la seule inspection de l'objet. On donnera toujours aux hachures, une direction différente des directions des lignes tracées sur l'espace à recouvrir. Afin de conserver sûrement le parallélisme des hachures, on pourra faire glisser la règle de l'instrument, le long d'une autre règle fixée sur la planche à dessiner, à l'aide de deux forts clous à papier, dits *punaises*.

Il existe aussi dans le commerce, des *règles à hachurer* d'un excellent usage.

19. **Grattoirs.** — Les taches et les faux traits à l'encre seront enlevés à l'aide du *grattoir*.

Un bon dessinateur doit être habile à réparer ses fautes et les élèves devront s'exercer, avec soin, au maniement du grattoir.

Avant de dessiner sur les parties du papier entamées par le grattoir, on aura soin de les frotter à dolage et de les polir avec le plat du grattoir.

20. Ordre à suivre dans la mise à l'encre d'une épure. — Dans la mise à l'encre, on commencera par le trait plein, on dessinera ensuite les traits ponctués, s'il y a lieu, puis on continuera par les autres lignes de l'épure.

Pour cette dernière opération, il est indispensable de refaire mentalement, dans leur ordre logique, toutes les opérations qui ont conduit au résultat demandé. On évitera ainsi de négliger certaines lignes, et en outre, on constatera fréquemment que des lignes tracées au crayon sont inutiles.

Toutes les lignes nécessaires à la résolution du problème posé, seront mises à l'encre.

La mise à l'encre du cadre et le nettoyage des deux faces de la feuille, termineront le travail.

21. Exercice. — Tracé des lignes droites et circulaires. — Les élèves exécuteront, en observant les prescriptions précédentes, sur une feuille $\frac{1}{4}$ grand-aigle (nº 3), dans un cadre rectangulaire qui a 210 millimètres de largeur et 330 millimètres de hauteur (nº 14), un dessin d'après le programme ci-après.

La figure 299 représente le dessin à l'échelle de $\frac{1}{4}$.

On divise un des grands côtés du cadre en six parties égales. Par les cinq points de division, on mène des parallèles aux petits côtés. Dans les deux compartiments supérieurs, on mène deux parallèles aux grands côtés et distants de ceux-ci de 10 millimètres. Sur chacune de ces parallèles, sont situés dans chaque compartiment, quatre points partageant en cinq parties égales les portions des parallèles situées dans le compartiment considéré. Chacun de ces points est indiqué par une croix de St-André, dont les côtés, inclinés à 45° sur les côtés du cadre, sont arrêtés à deux droites parallèles à la droite sur laquelle se trouvent les points et situées à 3 millimètres de distance de cette dernière droite.

On unit par des parallèles aux petits côtés du cadre, les points de gauche aux points de droite.

Les milieux des horizontales cotées 3 et 5 sont chacun le centre de trois circonférences ayant respectivement 45, 35 et 25 millimètres.

Mise à l'encre. — La figure 299 représente le dessin achevé à l'encre et indique les lignes que l'on devra dessiner en traits pleins, en traits interrompus ou en traits ponctués.

Le trait fin du cadre, les horizontales 1, 2, 3, 4 et 5 ainsi que la verticale centrale auront une très faible épaisseur.

Le gros trait du cadre aura 2 millimètres d'épaisseur et l'intervalle entre le gros trait et le trait fin sera de 2 millimètres.

L'épaisseur du trait pour les autres lignes de l'épure sera de $\frac{1}{2}$ millimètre.

APPENDICE B.

Programmes d'épures. (*)

Nous engageons vivement les commençants à faire toutes les épures dont les programmes sont donnés dans cet appendice et dans l'appendice C, en ayant soin d'observer les prescriptions de l'appendice A.

Chacune des épures dont nous donnons les programmes doit être dessinée sur une feuille 1/4 grand-aigle (App. A, n° 3), dans un cadre rectangulaire qui a 210 millimètres de largeur et 330 millimètres de hauteur, sauf quand le contraire est spécifié. Les figures des planches 38 à 47 représentent les données et les cadres rectangulaires réduits; toutes les dimensions indiquées numériquement sur ces figures, sont données en millimètres sans réduction (App. A, n° 14).

Premiers problèmes sur le point, la droite et le plan. — I. (M). — *On donne* (fig. 300) : 1° Le plan debout α;
2° Le plan (B, *d*) de la base BCD d'un tétraèdre;
3° La projection verticale P^v du pied de la hauteur abaissée du sommet A sur ce plan.

On demande de construire le tétraèdre sachant : 1° Que l'arête BC est parallèle au second plan bissecteur;
2° Que le sommet A est à 40 mm. au-dessus du point B;
3° Que le plan de la face ACD est perpendiculaire à l'arête BC;
4° Que l'arête AD est parallèle au plan α.

II. (E). — *On donne* (fig. 301) : Les droites *a*, *b* et *c*;
2° La projection horizontale du point A;
3° La projection verticale de la droite *d*.

(*) Les programmes marqués (G) ont été préparés par M. le lieutenant Goedseels, répétiteur de Géométrie Descriptive, actuellement Administrateur-Inspecteur de l'Observatoire de Belgique.

Les programmes marqués (L) ont été préparés par M. le lieutenant du génie Lefèvre, répétiteur de Géométrie Descriptive, actuellement professeur d'Analyse à l'École Militaire.

Les programmes marqués (CS) ont été préparés par M. le lieutenant du génie Cambier, répétiteur de Géométrie Descriptive, actuellement capitaine commandant du génie.

Les programmes marqués (M) ont été préparés par M. le capitaine du génie Michelet, quand il était répétiteur de Géométrie Descriptive.

Les programmes marqués (E) ont été préparés par M. le capitaine d'artillerie Edouard, répétiteur de Géométrie Descriptive, chargé du cours de Construction des Cartes.

Les programmes marqués (CC) ont été préparés par M. le lieutenant du génie Chargois, répétiteur de Géométrie Descriptive, actuellement professeur de ce cours à l'Université Libre de Bruxelles.

Les programmes marqués (B) ont été préparés par M. le lieutenant du génie Beaudoux, répétiteur de Géométrie Descriptive.

On demande : 1° De mener par la droite *a* un plan α parallèle à la droite *b*;
2° De mener par la droite *c* un plan β perpendiculaire au plan α;
3° De chercher l'intersection *e* du plan β avec le second plan bissecteur;
4° De chercher la projection horizontale de la droite *d*, supposée contenue dans le plan β;
5° De chercher la projection verticale du point A, supposé situé dans le plan β;
6° De mener par le point A, parallèlement à la droite *b*, un plan debout γ;
7° De chercher l'intersection *f* du plan γ avec le plan β;
8° De dessiner, en traits pleins, les projections du triangle formé par les droites *d*, *e* et *f*.

III. (M). — *On donne* (fig. 302) : 1° Les plans α et β;

2° La droite de profil (AB).

On demande : 1° De déterminer l'intersection *i* des plans α et β;

2° De déterminer un point M situé dans le second plan bissecteur, en avant du plan α, au dessus du plan β et respectivement à 45 et 135 mm. de distance de ces plans;

3° De déterminer les projections d'un point N situé sur la droite AB en avant de α, au dessus de β et à égales distances de ces plans; on remarquera que le plan bissecteur du dièdre formé par les plans α et β peut-être déterminé aisément par la droite *i* et par l'intersection de deux plans également distants des plans α et β;

4° De construire le triangle rectangle dont N est un sommet et dont l'hypoténuse et un côté sont respectivement les perpendiculaires abaissées de N sur *i* et sur le plan (M, *i*).

NB. Dans cet exercice, on ne fera usage ni de rabattements, ni de rotations, ni de changements de plan de projection.

IV. (E). — *On donne* (fig. 303) : 1° Le point A;

2° La droite *a*.

On demande : 1° De mener par A une frontale *b* perpendiculaire à *a*;

2° De déterminer sur *b* un point B, situé au-dessous de A et tel que la distance BA soit égale à 136 mm.;

3° De construire au point B, un plan parallèle aux premiers plans bissecteurs;

4° De chercher le point C, intersection de la droite *a* et du plan renseigné au 3°;

5° De mener par le milieu de CB, une perpendiculaire *p* au plan ABC;

6° De prendre sur *p*, un point D situé à 116 millimètres en avant du plan de front passant par A;

7° De représenter le tétraèdre ABCD.

V. (CC). — *On donne* (fig. 304) : 1° Le plan (1, 2), déterminé par l'horizontale *1* et la droite *2*;

2° Le point A;

3° Le point M.

On demande : 1° De déterminer l'intersection *i* du plan (1, 2) et du plan mené par le point M parallèlement au second plan bissecteur; le point de rencontre des droites *1* et *i* sera désigné par B;

2° De mener par le point M une perpendiculaire *p* sur la droite *i*; le pied de cette perpendiculaire sera désigné par C ;

3° De mener par le point A une perpendiculaire *p'* au plan (*1*, *2*) et de déterminer le point d'intersection D de cette perpendiculaire avec le plan (*1*, *2*);

4° De représenter le tétraèdre plein et opaque ayant pour sommets les points A, B, C, D.

VI. (M). — *On donne* (fig. 305), pour un prisme triangulaire : 1° Une arête indéfinie AB de la première base;

2° Une arête indéfinie CD de la seconde base;

3° La direction *a* des arêtes latérales;

4° Une droite *b* de la face qui ne renferme ni AB ni CD.

On demande : 1° De construire l'arête qui rencontre AB et CD;

2° De construire les autres arêtes et les sommets du prisme, ces derniers seront désignés respectivement par E, F, G, E_1, F_1, G_1;

3° De mener par la droite AB un plan perpendiculaire au plan de la face latérale qui renferme *b*;

4° De chercher l'intersection des deux plans considérés au 3°;

5° De représenter les arêtes du prisme supposé prolongé jusqu'au plan construit au 3°.

VII. (G). — *On donne* (fig. 306) trois droites *1*, *2* et *a* se rencontrant en un point A.

On demande : 1° De mener, par le point A, une perpendiculaire *3* au plan (*1*, *2*);

2° De prendre sur la droite *2*, au-dessous du plan horizontal passant par *1*, un point C distant de A de $0^{m}100$;

3° De chercher les intersections du plan α, mené par C perpendiculairement à la droite *a*, avec les plans (*1*, *2*), (*1*, *3*) et (*2*, *3*);

4° De représenter le tétraèdre ayant, comme plan de base, le plan α et comme arêtes, les droites *1*, *2* et *3*,

On appliquera la règle générale (n° 145) à suivre pour reconnaitre si l'arête d'intersection des plans (*1*, 3) et α, est vue ou cachée pour le plan vertical; pour les autres projections des arêtes, on pourra, si on le juge bon, se dispenser d'appliquer la règle générale.

VIII. (G). — *On donne* (fig. 307) : 1° Une arête AB d'un parallélépipède rectangle;

2° La projection 2^{v} d'une deuxième arête ;

3° Le plan de front α passant par l'extrémité inconnue de l'arête *2*;

4° Un point K du plan mené parallèlement au second plan bissecteur, par l'extrémité inconnue de la troisième arête *3* aboutissant au point A.

On demande : 1° La projection 2^{h};

2° Les projections 3^{h} et 3^{v};

3° Les projections horizontales et verticales des autres arêtes du parallélépipède;

4° La représentation du parallélépipède, après avoir déterminé, par application de la règle générale (n° 145), les arêtes vues et cachées pour chaque plan de projection.

IX. (M). — *On donne* (fig 308) : 1° Une arête latérale *a* d'un prisme droit dont les points A et B sont deux sommets et dont la base est un triangle, rectangle en B;

2° La projection verticale C^v d'un second sommet de cette base;

3° Le point D.

On demande : 1° De construire le plan de la base du prisme;

2° De construire la projection horizontale du sommet C;

3° De mener par B la troisième arête que nous désignerons par *b*;

4° De chercher le second sommet E situé sur *b*, sachant que le point D se trouve dans le plan de la face latérale renfermant EC;

5° De construire la seconde face triangulaire du prisme, sachant que le plan α de cette face passe par A et est parallèle au second plan bissecteur;

6° De représenter les projections des arêtes du tronc de prisme compris entre la base BCE et le plan α.

Sections planes dans les polyèdres. — X. (L). — *On donne* (fig. 309) : 1° Le point A ;

2° Les trois plans de profil *1*, *2* et *3*;

3° La projection horizontale d'un point K;

On demande : 1° Les projections de trois points B, C et D, placés respectivement dans les plans de profil 1, 2 et 3, sachant que ces points sont situés respectivement à 58, 126 et 29 mm. au-dessus du point A, et à 145, 116 et 34 mm. en avant du point A;

2° La projection verticale du point K, sachant que ce point se trouve dans le plan ABC;

3° La section faite dans le tétraèdre ABCD au moyen du plan mené par le point K parallèlement au second plan bissecteur;

4° La représentation de ce qui reste du tétraèdre supposé plein et opaque après avoir retranché de celui-ci la partie située au-dessous du plan sécant.

XI. (E). — *On donne* (fig. 310) : 1° Une pyramide ayant pour sommet le point S, et pour base un quadrilatère ABCD placé dans le second plan bissecteur ;

2° Le plan (*a*, *b*).

On demande : 1° De chercher la section plane faite, dans la pyramide, par le plan (*a*, *b*); on commencera par déterminer l'intersection du plan (*a*, *b*) avec le second plan bissecteur;

2° De représenter la partie de pyramide comprise entre le sommet S et le plan secant (*a*, *b*).

XII. (M). — *On donne* (fig. 311) : 1° Les points A, B, C, D;

2° Le sommet S d'un angle solide (S, ABCD);

3° Le point M;

4° Le plan debout α.

On demande : 1° De construire un plan passant par M et coupant les faces de l'angle solide suivant un parallélogramme;

2° De construire ce parallélogramme; les sommets sur SA, SB, SC, SD seront désignés respectivement par A′, B′, C′, D′;

3° De chercher la section plane faite par α dans la pyramide (S. A′B′C′D′);

4° De représenter le corps plein et opaque obtenu en enlevant de la pyramide la partie située au-dessus du plan sécant.

XIII. (E). — *On donne* (fig. 312) : 1° Le polyèdre formé de deux pyramides accolées ayant pour sommet commun le point A et pour bases respectivement les triangles BCE et ECD; on construira les arêtes de ce polyèdre;

2° Le point F;

3° La droite *a*.

On demande : 1° De construire la section plane faite par le plan (*a*, F) dans le polyèdre ABCDE; le tableau synthétique de cette construction sera dressé dans l'angle inférieur gauche de l'épure;

2° De représenter le polyèdre ABCDE, en le considérant comme un corps plein et opaque dont on n'aurait conservé que la portion comprise entre le point A et le plan sécant.

XIV. (M). — *On donne* (fig. 313) : 1° Le triangle ABC, placé dans le plan de front α;

2° La projection verticale d'un second triangle A'B'C';

3° La projection verticale F^v d'un point F;

4° Une horizontale *a*;

5° Les points D, E, G;

On demande : 1° De construire les projections des arêtes d'un prisme parallèle à *a* et ayant le triangle ABC pour base;

2° De construire la projection horizontale du triangle A'B'C' sachant que ses sommets sont placés respectivement sur les arêtes latérales issues des points A, B, C, dans le prisme précédent;

3° De chercher la projection horizontale du point F considéré comme appartenant à la droite A'C';

4° De considérer le polyèdre *non convexe* limité au triangle ABC, aux quadrilatères AA'BB', BB'CC', CC'AA' et aux triangles DA'B', DB'C', DC'A';

5° De construire l'intersection de ce polyèdre et du plan (EFG); le tableau synthétique de cette recherche sera établi sur l'épure;

6° De représenter le corps solide, plein et opaque obtenu en enlevant du polyèdre, supposé plein et opaque, la partie située en avant du plan sécant.

XV. (M). — *On donne* (fig. 314) : 1° Les sommets A, B, C, D, d'un tétraèdre;

2° Les projections verticales de deux points M et N de l'arête BD;

3° La droite *d*.

On demande : 1° Les sections planes faites dans le tétraèdre par les plans (M, *d*) et (N, *d*); les tableaux synthétiques de la recherche des sections planes seront dressés sur l'épure;

2° La représentation du tétraèdre considéré comme un corps plein et opaque, après avoir enlevé toute la partie de ce solide comprise dans le dièdre formé par les portions des plans (M,*d*) et (N, *d*) d'une part et dans le dièdre opposé d'autre part.

Intersection de deux polyèdres. — XVI. (CC). — *On donne* (fig. 315) : 1° La pyramide SDEF;

2° Le prisme triangulaire indéfini ayant pour arêtes les droites *a*, *b*, *c*.

On demande : 1° De construire l'intersection du prisme (*a*, *b*, *c*) et de la pyramide SDEF; le tableau synthétique de cette construction sera dressé à l'angle inférieur droit de l'épure;

2° De représenter le solide commun au prisme et à la pyramide, en considérant ce solide comme un corps plein et opaque.

XVII. (L). — Le cadre de cette épure aura 330 mm. de hauteur sur 250 mm. de largeur.

On donne (fig. 316) : 1° Un prisme dont la base est un pentagone MNPQR placé dans le plan de front β, et dont les arêtes sont parallèles à la droite *d*;

2° Une pyramide dont la base est un quadrilatère ABCD placé dans le plan horizontal α et dont le sommet est le point S;

On demande : 1° De chercher l'intersection de ce prisme et de cette pyramide;

2° De représenter la pyramide, considérée comme un corps plein et opaque, après avoir enlevé dans ce corps la portion comprise dans le prisme.

XVIII. (L). — *On donne* (fig. 317) : 1° Un prisme dont la base est un triangle MNP placé dans le plan horizontal α et dont les arêtes sont parallèles à la droite *d*;

2° Une pyramide dont la base est un triangle ABC placé dans le plan de front β et dont le sommet est le point S;

3° Un plan horizontal ϒ.

On demande : 1° De chercher la section faite dans le prisme par le plan ϒ;

2° De chercher l'intersection du prisme et de la pyramide;

3° De représenter le prisme, considéré comme un corps plein et opaque, limité aux plans horizontaux α et ϒ, après avoir enlevé dans ce corps la portion comprise dans la pyramide.

XIX. — *On donne* (fig. 318) : 1° Une pyramide dont la base est le triangle ABC, situé dans le plan horizontal α, et dont le sommet est le point S;

2° Un prisme dont la base est le quadrilatère DEFG situé dans le plan α et dont les arêtes sont parallèles à la droite *d*. Ce prisme est limité, d'une part au plan α, et d'autre part, au plan horizontal β.

On demande : 1° De chercher l'intersection du prisme et de la pyramide;

2° De représenter le prisme, considéré comme un corps plein et opaque, dans lequel on aurait supprimé la partie comprise dans la pyramide.

Rabattements, rotations et changements des plans de projection. — XX. — *On donne* (fig. 319) : 1° Un plan (*1*, *2*) dont les directrices se coupent en I;

2° Un point S et un point M.

On demande : 1° De construire un quadrilatère ABCD, sachant que les points B et C sont situés sur la droite *1*; que les points A et D sont situés sur la droite *2* et que les distances AI, BI, CI, DI, valent respectivement 242, 210, 96 et 146 mm.;

2° De construire les arêtes de la pyramide SABCD;

3° De chercher la section faite dans cette pyramide par le plan vertical α;

4° De mener, par le point M, un plan coupant la pyramide suivant un parallélogramme dont on déterminera les projections et la vraie grandeur;

5° De représenter ce qui reste de la pyramide SABCD, qnand on retranche de celle-ci, les pyramides ayant les points B et S comme sommets et limitées respectivement au plan α et au plan mené par M.

XXI. (Q). *On donne* (fig. 320) : 1° Un prisme tronqué dont les arêtes sont parallèles à la droite des points B et F et dont les sommets sont les points A, B, C, D, E, F.

On demande : 1° De chercher, par un rabattement, la vraie grandeur de la face DEF;

2° de dessiner les projections de la face ACED, rendue parallèle à un des plans de projection par deux rotations successives;

3° De dessiner les projections de la face BCEF, rendue parallèle à un nouveau plan de projection, après deux changements de plan de projection;

4° De dessiner, en traits pleins ou ponctués, conformément aux conventions connues, la projection horizontale du prisme.

XXII. — *On donne* (fig. 321) : 1° Un prisme dont la base est un pentagone placé dans le plan horizontal α et dont les arêtes sont parallèles à la droite *d;*

2° Un prisme dont la base est un hexagone placé dans le plan α et dont les arêtes sont parallèles à la droite *d'*.

On demande : 1° De chercher l'intersection des deux prismes;

2° De déterminer la section plane faite dans le prisme (A, *d*) au moyen d'un plan mené, par le point M, perpendiculairement aux arêtes de ce prisme;

3° De représenter le prisme (A, *d*) considéré comme un corps plein et opaque, limité au plan α et à la section droite, après avoir enlevé dans ce corps, la portion comprise dans l'autre prisme;

4° De tracer le développement du prisme (A, *d*), en ouvrant celui-ci suivant l'arête MA et en plaçant, dans le développement, l'arête MA en M'A' (fig. 322).

N. B. Toutes les constructions relatives au 1°, au 2° et au 3°, seront faites sur une première feuille (fig. 320); le développement du prisme sera construit sur une seconde feuille (fig. 321).

Pour chercher l'intersection des prismes, on se servira de plans auxiliaires parallèles aux arêtes de ces prismes.

On couvrira de hachures les projections des parties vues des faces de l'entaille faite dans le prisme (A, *d*).

XXIII. (CC). — *On donne* (fig. 323) : 1° Une pyramide ayant comme sommet le point S et comme base le pentagone non convexe ABCDE tracé dans le plan horizontal α;

2° Le point F sur l'arête SA de la pyramide;

3° La droite *x* parallèle au côté AB de la base.

On demande : 1° De construire la section plane faite dans la pyramide SABCDE par le plan (F, *x*); le tableau synthétique de cette construction sera dressé dans l'angle supérieur gauche de l'épure;

2° De déterminer la vraie grandeur de cette section plane en rabattant le plan sécant sur le plan de front passant par le sommet situé le plus en arrière sur la section plane;

3° De représenter à l'encre le tronc de pyramide compris entre les plans α et (F, *1*), en le considérant comme un corps plein et opaque.

XXIV. (M). — *On donne* (fig. 324) : 1° Les sommets A, B, C, D d'un tétraèdre; 2° Le point E.

On demande : 1° De tracer les projections des arêtes du tétraèdre;

2° De mener par le point E un plan parallèle au second plan bissecteur;

3° De chercher la section plane faite dans le tétraèdre par le plan précédent;

4° De chercher, par un rabattement, la vraie grandeur de cette section;

5° De représenter à l'encre le tétraèdre ABCD après en avoir enlevé la partie située *au-dessus* du plan sécant.

N. B. Le tableau synthétique de la recherche de la section plane sera dressé sur l'épure.

XXV. (E). — *On donne* le triangle ABC (fig. 325).

On demande : 1° De rabattre le triangle ABC sur un plan horizontal; on désignera par A_r, B_r, C_r les sommets du triangle après rabattement;

2° De faire tourner le triangle ABC autour d'un axe debout, de façon à amener son plan à être vertical; on désignera par A_1, B_1, C_1 les sommets du triangle après rotation;

3° De prendre un nouveau plan vertical de projection parallèle au plan $A_1B_1C_1$ et de chercher la nouvelle projection verticale du triangle $A_1B_1C_1$.

XXVI. (CC). — *On donne* (fig. 326) : 1° Le plan (*1*, *2*);

2° Le point A, intersection des droites 1 et *2*;

3° Le point B sur la droite *2*.

On demande : 1° De construire les projections d'un tétraèdre régulier ayant AB pour côté, sachant que le 3e sommet, C, est situé dans le plan (*1*, *2*) en avant de AB, et que le 4e sommet, D, est au dessus du plan (*1*, *2*). Pour résoudre cette question, on effectuera les opérations suivantes :

a) rendre le plan (*1*, *2*) perpendiculaire au plan vertical de projection au moyen d'une rotation autour d'un axe passant par B;

b) prendre un nouveau plan de projection horizontal parallèle au plan (*1*, *2*) après sa rotation;

c) construire dans ce nouveau système les projections des sommets du tétraèdre;

d) par les opérations inverses de celles qui sont indiquées aux littéra *b*) et *a*) ci-dessus, amener les sommets à la position qu'ils doivent occuper.

2° De représenter le tétraèdre ainsi obtenu, en le considérant comme un corps plein et opaque.

XXVII. (M). — *On donne* (fig. 327) : 1° Les extrémités d'une arête d'un cube;

2° Les projections verticales M^v et N^v de deux points de la surface de ce cube;

3° Les plans horizontaux α et β.

On demande : 1° De construire l'arête AC du cube, sachant que cette droite est de profil et que le sommet C est en avant de A;

2° De construire l'arête AD et le sommet D, sachant que ce point est au-dessus de A;

3° De construire les autres sommets du cube;

4° De considérer les points d'intersection P et Q de l'arête de profil passant par D avec les plans α et β;

5° De construire les sections faites dans le cube par les plans (M, N, P) et (M, N, Q), sachant que les points M et N sont sur la partie vue du cube pour le plan vertical;

6° De représenter le cube supposé plein et opaque, après en avoir enlevé les parties qui sont simultanément en avant d'un des plans sécants et en arrière de l'autre.

N. B. — On couvrira de hachures distantes de 2mm les parties vues des sections planes.

XXVIII. (M). — *On donne* (fig. 328): 1° Les points A,B,C,D;

2° Le centre O d'un octaèdre régulier;

On demande : 1° De construire un sommet E de l'octaèdre, sachant que ce point se trouve à l'intersection des droites (A, B) et (C, D);

2° De construire le second sommet E' situé sur la diagonale EO;

3° De construire une deuxième diagonale, sachant que cette droite est de profil;

4° De construire les sommets F, F' situés sur la diagonale qu'on vient de chercher; à cet effet, on remarquera que OF=OE;

5° De construire la 3e diagonale ainsi que les sommets G et G' situés sur cette droite;

6° De représenter le corps solide, plein et opaque, limité par l'octaèdre.

XXIX. — *On demande* (fig. 329) de trouver la plus courte distance entre les droites d_1 et d_2, en amenant l'une d'elles d_1, par des changements de plan de projection, à être perpendiculaire à l'un des plans de projection.

On abandonnera d'abord le plan vertical de projection.

XXX. — *On demande* (fig. 330) de trouver la plus courte distance entre les droites d_1 et d_2, en amenant la droite d_2 à être perpendiculaire au plan horizontal, à l'aide de mouvements de rotation.

XXXI. — *On demande* (fig. 331) de trouver la plus courte distance entre les droites d_1 et d_2, en amenant la droite d_1 à être perpendiculaire à l'un des plans de projection.

On amènera d'abord la droite d_1 à être parallèle au plan vertical, à l'aide d'un mouvement de rotation; puis, on fera un changement de plan de projection.

XXXII. — *On demande* (fig. 332) de trouver la plus courte distance entre les droites d_1 et d_2, en amenant celles-ci, par un changement de plan de projection, à avoir leurs projections parallèles sur l'un des plans de comparaison.

Dans le changement de plan de projection, on conservera le plan horizontal.

XXXIII. — *On demande* (fig. 333) de trouver la plus courte distance entre les droites d_1 et d_2, en amenant par un mouvement de rotation, les droites données dans

une position telle que leurs projections verticales soient parallèles entre elles.

XXXIV. — *On donne* (fig. 334) : 1° Un plan (*1*, *2*) et, dans ce plan, un carré dont la diagonale est AC;

2° Une droite *3*.

On demande : 1° De construire les projections d'un cube dont une des faces est le carré ABCD, et dont l'arête partant du point C, perpendiculairement au plan (*1*, *2*), tombe en avant du plan de front mené par *2*;

2° De mener par *3*, un plan α perpendiculaire au plan (*1*, *2*);

3° De construire l'intersection du plan α avec le cube;

4° De représenter le cube considéré comme un corps plein et opaque, après avoir enlevé le prisme triangulaire compris entre les faces du cube et le plan sécant.

XXXV. — *On donne* (fig. 335) : 1° Un plan déterminé par l'horizontale *1* et la droite *2*, parallèle au second plan bissecteur;

2° Le point A, la droite *d* et la projection horizontale d'une droite *3* du plan (*1*, *2*).

On demande : 1° De dessiner les projections d'un carré ABCD placé dans le plan (*1*, *2*); le côté AB est placé sur la droite *1*, le point B est en avant du plan de front passant par A ; le carré se trouve au-dessus du plan horizontal passant par *1*; enfin, la longueur du côté est égale à la longueur mesurée sur le prolongement du côté DA, entre la droite *1* et la droite *2*;

2° De déterminer un plan α passant par la droite *3*, faisant avec le plan (*1*, *2*) un angle de 9° et tel que la partie du plan α située au-dessus de plan (*1*, *2*) est aussi en avant du plan projetant horizontalement la droite *3*;

3° De dessiner les projections de la section plane faite par le plan α, dans le prisme ayant le carré ABCD comme base, et comme arêtes des droites parallèles à *d*;

4° De dessiner le rabattement de cette section plane sur un plan parallèle à un plan de projection;

5° De représenter le prisme, considéré comme un corps plein et opaque, limité entre le plan (*1*, *2*) et le plan α.

N. B. Pour construire le plan α, on prendra un nouveau plan de projection parallèle à *3* et perpendiculaire à H.

XXXVI. (G). — *On donne* (fig. 336) : 1° Un plan α passant par la droite *1* et faisant avec le plan de front β, au-dessus du plan debout mené par *1* et en avant de β, un angle de 38°;

2° La droite 2^v et les points X^v, S^v;

3° La droite de bout *a*.

On demande : 1° De construire, dans le plan α, un hexagone régulier inscrit dans une circonférence de 40 mm. de rayon ; cet hexagone aura le point X comme centre et la droite *2* comme diagonale;

2° De trouver S^h, sachant que le point S est situé derrière le plan de front β et que la projection, sur le second plan bissecteur de la droite joignant le point S au point le plus élevé de l'hexagone régulier, a une longueur de 113 mm. (on prendra le plan bissecteur comme nouveau plan de projection);

3° De faire tourner le plan α autour de l'axe *a*, dans le sens indiqué par la flèche, jusqu'à ce que ce plan soit amené, en α_1, perpendiculairement au plan horizontal;

4° De construire les projections de la section plane faite par le plan α, dans la pyramide ayant le point S comme sommet et l'hexagone régulier comme base;

5° De représenter le tronc de pyramide limité entre les plans α et α_1.

XXXVII. — *On donne* (fig. 337) : 1° la droite *1*;

2° le point A;

3° le point S^h.

On demande : 1° de construire un triangle isocèle ABC sachant que ce triangle est placé dans le plan (A, *1*), que le côté AB est parallèle au plan horizontal et que la base BC est placée sur la droite *1*;

2° De mener par AB un plan α faisant avec le plan (A, *1*) un angle de 69°; parmi les deux plans répondant à cette condition, on prendra celui qui fait avec un plan horizontal, le plus petit angle aigu;

3° De chercher la seconde projection du point S considéré comme étant situé dans le plan α;

4° De chercher dans le tétraèdre SABC, la mesure du dièdre BC;

5° De représenter le tétraèdre SABC en le considérant comme un corps plein et opaque.

XXXVIII. — *On donne* (fig. 338) 1° Le point A;

2° Les quatre plans de profil *1*, *2*, *3* et *4*.

On demande : 1° Les projections de trois points B, C et D, placés respectivement dans les plans de profil *1*, *2* et *3*, sachant que ces points sont situés respectivement à 28, 76, 105 mm. au-dessus du point A et à 8, 83, 56 mm. en avant du point A;

2° La projection horizontale d'un point M du plan de profil *4*, placé à 67 mm. en avant de A;

3° La plus courte distance *d* entre les droites (A, C) et (B, D) dans la position où elle s'appuie sur ces deux droites;

4° La projection verticale du point M en supposant que ce point appartient au plan (A, B, C);

5° La section plane faite dans le tétraèdre ABCD par le plan (*d*, M);

6° L'angle du plan (*d*, M) et du plan (*d*, B, D) en considérant dans ces deux plans les parties situées en arrière du plan vertical mené par *d*; cet angle sera désigné dans l'épure par la lettre φ;

7° La représentation du tétraèdre ABCD, du contour de la section plane et de la plus courte distance *d*, en considérant le tétraèdre, comme un corps plein et opaque.

XXXIX. (**CS**). — *On donne* (fig. 339): 1° Deux droites *1* et *2*;

2° Un plan vertical α;

3° Un prisme P, par sa base ABCD dans un plan horizontal β et la direction *3* de ses arêtes.

On demande : 1° De chercher la plus courte distance *d* entre les droites *1* et *2*, dans la position où cette plus courte distance s'appuie sur les droites *1* et *2*;

2° D'inscrire, dans un plan perpendiculaire à x, un carré dont d est une diagonale; le carré ainsi construit est une section plane dans un prisme P′ dont les arêtes sont parallèles à x;

3° De construire le prisme P′ en le limitant entre les plans α et β;

4° De chercher l'intersection des prismes P et P′;

5° De représenter le prisme P′ considéré comme un corps plein et opaque dont on enlèverait la partie appartenant au prisme P.

XL. — Le cadre de cette épure aura 330 mm. de hauteur sur 220 mm. de largeur.

On donne (fig. 340): 1° Le plan α et une charnière *ch* prise dans ce plan;

2° La flèche f;

3° La projection horizontale $A_r^hB^hD_r^h$ du rabattement d'un triangle ABD placé dans un plan dont la partie située au-dessus de α fait avec la partie marquée f dans le plan α un angle de 53°;

4° La projection P^v d'un point P du plan ABD.

On demande: 1° De relever le plan ABD et de chercher les projections du triangle ABD;

2° De mener par P une perpendiculaire au plan ABD et de déterminer sur cette perpendiculaire un point C, sachant que le point C se trouve à droite du plan de profil du point P et que la longueur CP vaut 45 millimètres;

3° De déterminer, dans le tétraèdre dont les sommets sont les points A, B, C, D, l'angle dièdre ayant AB comme arête;

4° De représenter le tétraèdre ABCD considéré comme un corps plein et opaque.

XLI. (**E**). — *On donne* (fig. 341): 1° Le point A;

2° Le point B;

3° La droite a;

4° La projection verticale b^v d'une droite b.

On demande: 1° D'abaisser du point A une perpendiculaire sur la droite a et d'en construire le point d'appui C sur cette même droite;

2° De construire la vraie grandeur de la distance AC;

3° De porter sur la droite a une longueur CD égale à AC, le point D étant situé à droite du plan de profil contenant le point C;

4° De construire le quatrième sommet E du carré dont les trois autres sommets sont les points A, C et D;

5° De considérer la pyramide ayant pour base le carré ACDE, pour sommet le point B et de construire les arêtes de cette pyramide;

6° De construire la projection horizontale d'une droite b, située dans le plan (A, a), et dont b^v est la projection verticale;

7° De mener par la droite b un plan α, perpendiculaire au plan (A, a);

8° De construire la section faite par le plan α dans la pyramide BACDE; on dressera dans le coin inférieur gauche de l'épure le tableau synthétique de cette construction;

9° De construire la vraie grandeur de la section plane faite au 8°, en rabattant le plan de cette section sur un plan horizontal;

10° De construire la vraie grandeur de l'angle des plans (A, *a*) et (B, *a*), en amenant l'intersection de ces deux plans à être une droite de bout, par une rotation suivie d'un changement de plan de projection ;

11° De représenter la pyramide quadrangulaire BACDE, considérée comme un corps plein et opaque, dont on aurait enlevé la partie comprise entre le sommet B et la section plane construite au 8°.

XLII (**M**). — *On donne* (fig 342) : 1° Les droites *a* et *b* ;

2° La projection horizontale de la frontale *c*.

On demande : 1° De construire la plus courte distance entre les droites *a* et *b* dans la position où elle s'appuie sur ces deux droites ; à cet effet on amènera un plan parallèle à *a* et à *b*, à être parallèle au plan vertical de projection, au moyen d'une rotation suivie d'un changement de plan de projection ; on désignera par A et B les extrémités de la plus courte distance sur *a* et sur *b* ;

2° De porter sur les droites *a* et *b* des longueurs AD et BB' égales à AB, D étant en arrière de A, et B' en arrière de B :

3° De construire le parallélépipède ABCDA'B'C'D' dont trois arêtes successives sont DA, AB, BB' (le sommet C sera le quatrième sommet de la face BAD et il aura pour opposé dans le polyèdre, le sommet A') :

4° D'enlever du parallélépipède le tétraèdre CC'BD et de considérer le polyèdre restant ;

5° De chercher la projection verticale de *c*, sachant que cette droite est dans le plan BB'C' ;

6° De mener par *c* un plan faisant avec le plan de front un angle de 56^{g}, cet angle étant formé, dans un plan de mesure, à gauche et en arrière de son sommet sur *c* ;

7° De construire la section faite par le plan construit au 6° dans le polyèdre considéré au 4° ;

8° De représenter le polyèdre considéré comme un corps matériel, plein et opaque, et de représenter la trace du plan sécant sur ce polyèdre, *ou bien* de représenter le polyèdre considéré comme un corps matériel, plein et opaque, dont on enlève ce qui est en arrière du plan sécant.

XLIII. (**E**). — *On donne* (fig. 343) : 1° La droite *1*,

2° Le point A,

3° Le plan horizontal α,

4° La projection horizontale 2^h d'une droite *2*.

On demande : 1° De mener, par la droite *1*, un plan dont la partie située au-dessus de α fait un angle de 61^{gr} avec la partie de α située en avant du plan projetant horizontalement la droite *1* ;

2° De chercher la projection verticale de la droite *2* située dans le plan construit au 1° ;

3° De rabattre le plan (*1*, *2*) sur le plan horizontal α et de chercher le rabattement de la droite *2* ;

4° De prendre un point B_r^A sur la droite *2* rabattue, à 162 mm. de A, vers la droite du plan de profil qui contient le point A ;

5° De tracer une circonférence du point B_r^A comme centre, avec un rayon égal

à 48 mm., et d'y inscrire un hexagone régulier dont deux côtés soient parallèles à la droite 1^h ;

6° De relever l'hexagone construit au 5°, en le considérant comme étant le rabattement d'un hexagone appartenant au plan (*1*, *2*).

XLIV. (E). — *On donne* (fig. 344) : 1° Le point A,

2° Le point B,

3° La frontale *a*.

On demande : 1° D'abaisser du point B une perpendiculaire sur la droite *a*; on désignera par C le pied de cette perpendiculaire;

2° De porter sur la droite *a* une longueur CD égale à la distance BC, de telle sorte que le point D soit au-dessus du point C;

3° De construire les projections du carré BCDE dont les points B, C et D sont trois sommets, puis de construire les arêtes d'une pyramide dont le sommet est le point A et dont la base est le carré BCDE;

4° De mener par le milieu de l'arête AB un plan perpendiculaire à cette arête;

5° De construire la section plane faite dans la pyramide ABCDE par le plan α; on commencera par construire l'intersection de la base BCDE et du plan α;

6° De chercher la grandeur de la section plane construite au 5° en rabattant le plan α sur le plan de front du point B;

7° De construire la plus courte distance entre les droites *a* et AE dans la position où elle s'appuie sur ces deux droites; à cet effet on fera au préalable tourner le système de ces deux droites autour d'un axe passant par le point E, de façon à rendre la droite *a* perpendiculaire à l'un des plans de projection;

8° De construire l'angle des deux plans BCDE et AEB, après avoir amené, au moyen d'un changement de plan de projection, le plan de mesure à être parallèle à un plan de projection;

9° De représenter le tronc de pyramide compris entre la base et la section plane construite au 5°, ce tronc de pyramide étant considéré comme un corps plein et opaque;

XLV. (B), — *On donne* (fig. 345) : 1° Les points A, B et M,

2° La projection verticale d'une droite *a*.

On demande : 1° De mener par le point D, milieu de AB, un plan α perpendiculaire à la droite AB;

2° De construire dans le plan α, un carré CD'EF, de 90 mm. de côté, ayant pour centre le point D, et dont deux côtés soient des frontales du plan α;

3° De construire les arêtes d'un octaèdre formé des deux pyramides quadrangulaires accolées dont CD'EF est la base commune, A et B les sommets;

4° De construire la projection horizontale de *a*, sachant que *a* est dans le plan α;

5° De déterminer la section plane faite par le plan (*a*, M) dans l'octaèdre construit au 3°; le tableau synthétique de la détermination de la section plane sera dressé dans l'angle inférieur droit de l'épure;

6° De déterminer la vraie grandeur de la section obtenue au 5°, en effectuant un rabattement;

7° De représenter l'octaèdre considéré comme un corps plein et opaque dont on aurait enlevé la partie comprise entre le point A et le plan (*a*, M).

XLVI. (B). — *On donne* (fig. 346) le plan (O, *1*).

On demande : 1° De construire dans le plan (O, *1*), un hexagone régulier inscrit dans une circonférence de 8 cm. de rayon et ayant le point O comme centre; deux des côtes de l'hexagone seront horizontaux;

2° De construire une pyramide régulière ayant pour base l'hexagone déterminé au 1°; le sommet S de cette pyramide sera situé au-dessus de O, et les faces latérales feront avec le plan de base des angles de 60°;

3° De déterminer, à l'aide d'un mouvement de rotation, sur la perpendiculaire SO, au-dessous de O, un point T situé à 72 millimètres de O;

4° De joindre le point T aux sommets de l'hexagone déterminé au 1° et de considérer l'octaèdre convexe ayant pour sommets les points S, T et les sommets de l'hexagone;

5° De mener par O une droite *2*, parallèle à *1*;

6° De déterminer un plan passant par *2*, faisant avec le plan (O, *1*) un angle de 85° et tel que le point S soit situé en avant du plan ainsi mené;

7° De déterminer la section plane faite, dans l'octaèdre construit au 4°, par le plan obtenu au 6°; le tableau synthétique pour la recherche de la section plane, sera dressé dans l'angle inférieur gauche de l'épure;

8° De représenter l'octaèdre ST considéré comme un corps plein et opaque, après en avoir enlevé toute la partie comprise entre le sommet S et le plan sécant.

APPENDICE C.

Programmes des épures demandées aux examens d'entrée à l'École Militaire (Artillerie et Génie).

Depuis 1883, aux examens d'entrée à l'École Militaire (Artillerie et Génie), les candidats ont à faire une épure, d'après un programme déterminé. Nous donnons, dans ce supplément, les programmes des épures demandées jusqu'en 1907 inclusivement.

Nous avons donné au commencement de l'Appendice B, des renseignements relatifs à ces programmes.

Les candidats habitués à se servir d'une ligne de terre, peuvent dessiner cette ligne, où ils veulent, parallèlement au bord inférieur du cadre de l'épure.

I. Année 1883. — *On donne* (fig. 347); 1° Le plan (*1*, *2*) dans lequel les droites *1* et *2* sont parallèles;

2° Le point K, pris sur la droite *2*;

3° La droite *d*.

On demande : 1° De déterminer l'intersection du plan (*1*, *2*) avec le second bissecteur;

2° De déterminer l'angle que fait cette intersection avec la droite *d*;

3° D'élever sur la droite *2*, dans le plan (*1*, *2*), par le point K pris sur *2*, une perpendiculaire dont la longueur soit de 36 mm. à partir du point K.

II. Année 1884.— *On donne* (fig. 348): 1° Le point M et la droite *d* d'un plan (*d*,M);

2° La droite *d'*;

3° La projection verticale d'un point A du plan (*d*,M).

On demande : 1° De déterminer la seconde projection du point A;

2° De mener, par le point A, une perpendiculaire au plan (*d*,M);

3° De déterminer la plus courte distance de cette perpendiculaire à la droite *d'*.

III. Année 1885. — *On donne* (fig. 349) : 1° Une droite *d*;

2° Un plan (*1*, *2*).

On demande : 1° De prendre, sur *d*, le point A de rencontre de cette droite avec le second plan bissecteur;

2° De déterminer, sur *d*, un point B, distant du point A de 171 mm.;

3° De trouver l'intersection du plan (*1*, *2*) avec le plan mené, par B, perpendiculairement à la droite *d*.

IV. Année 1886. — *On donne* (fig. 350) : 1° Un plan (*d*, *l*);

2° La projection verticale M^v d'un point M du plan (*d*, *l*).

31

On demande de construire les projections d'un triangle équilatéral, de 105 mm. de côté, qui soit situé dans le plan (l, d) et qui ait le point M comme sommet inférieur, un côté dans le plan de profil passant par ce point et un sommet à gauche de ce même plan de profil.

V. Année 1887. — *On donne* (fig. 351) : 1° Le plan (1, 2);
2° Le point A.
On demande : 1° D'abaisser du point A une perpendiculaire p sur le plan (1, 2);
2° De déterminer la distance d du point A au plan (1, 2);
3° De construire, dans le plan (1, 2), un carré dont le centre soit le pied de la perpendiculaire p, dont la diagonale soit égale à la distance d et dont deux côtés soient parallèles à la droite 1 du plan (1, 2).

VI. Année 1888. — *On donne* deux droites d et g (fig 352).
On demande : 1° De mener, par la droite d, un plan α parallèle à la droite g;
2° De chercher la distance, en vraie grandeur, de la droite g au plan α.

VII. Année 1889. — *On donne* (fig. 353) : 1° Un plan (A, 1);
2° La projection verticale B^v d'un point B du plan (A, 1).
On demande : 1° De déterminer la seconde projection du point B;
2° De mener par A, dans le plan (A, 1), une perpendiculaire à AB et de déterminer, sur cette perpendiculaire, un point C situé en arrière de A et distant du point A d'une longueur égale à AB;
3° De mener par A, une perpendiculaire au plan (A, 1) et de déterminer sur cette perpendiculaire un point D situé en arrière de A et distant du point A d'une longueur égale aussi à AB;
4° De représenter le tétraèdre ayant comme sommets, les points A, B, C et D.

VIII. Année 1890. — *On donne* (fig. 354) : 1° Les points A et B;
2° Les droites d et d'.
On demande : 1° Un point C situé sur d à égale distance des points A et B;
2° Une droite d'', passant par C, et s'appuyant sur les droites AB et d';
3° Un point S, situé dans le plan de profil passant par le point où d'' rencontre d', à 173 mm. au-dessus du plan horizontal passant par d' et à 142 mm. en avant du plan de front passant par d';
4° La représentation du tétraèdre ayant comme sommets les points S, A, B et C.

IX. Année 1891. — *On donne* (fig. 355) : 1° Les points B et C;
2° Le plan horizontal α qui contient les points B et C.
On demande : 1° De dessiner les projections du triangle ABC, situé dans le plan α, sachant que le point A est en avant des points B et C et que les distances AB et AC valent respectivement 0^m101 et 0^m076;
2° De construire les projections des arêtes d'un tétraèdre SABC, sachant que le triangle SAB est isocèle, que les angles SAB et SBA valent chacun 62°, que le côté SC vaut 0^m115 et que le point S est au-dessus de α;
3° De chercher les projections du centre O de la sphère circonscrite à la pyramide;

4° De déterminer les projections et la vraie grandeur de la section que fait, dans la pyramide, le plan mené par O parallèlement aux arêtes SB et AC.

X. Année 1892. — *On donne* (fig. 356) les sommets A, B, C, et S d'un tétraèdre;

On demande : 1° De déterminer, sur l'arête SC, un point X distant du point S de 87 millimètres;

2° De mener, par le point X, un plan perpendiculaire à l'arête SC et d'en chercher les intersections i et i' avec les faces SCA et SCB;

3° De déterminer l'angle des droites i et i';

4° De représenter le tétraèdre SABC.

XI. Année 1893. — *On donne* (fig. 357) un point A, deux droites *1* et *2* passant par ce point, la projection verticale d'un point C et un point D.

On demande : 1° La projection horizontale du point C situé dans le plan des deux droites;

2° Les projections d'un triangle équilatéral de 20 mm. de côté ayant un sommet en C, un côté dirigé suivant l'horizontale de C dans le plan (*1*, *2*), à droite de C, ce triangle étant situé dans le plan (*1*, *2*), au-dessus de l'horizontale;

3° La représentation du tétraèdre qui a pour base le triangle équilatéral construit au 2° et pour sommet, le point D;

4° La vraie grandeur de la section faite dans l'angle solide D par le plan de profil mené à 55 millimètres du bord droit du cadre.

XII. Année 1894. — *On donne* (fig. 358) : 1° Un prisme dont la base située dans le premier plan bissecteur correspondant à l'horizontale *e*, est un parallélogramme MNPQ donné par sa projection horizontale, et dont une arête *d* passant par Q, est donnée par sa projection horizontale d^h et par la projection verticale I^v d'un de ses points (I^v est sur le bord supérieur du cadre);

2° Une pyramide dont la base est un triangle équilatéral ABC, situé dans le plan horizontal α (BC est parallèle aux petits côtés du cadre), et ayant pour sommet le point S dont les projections sont situées sur le bord gauche du cadre.

On demande : 1° La section VV'V'' déterminée par la face NQ*d* du prisme dans la pyramide;

2° La représentation du prisme considéré comme un solide plein et opaque, limité par le plan de sa base et par le plan horizontal α, et dont on aurait enlevé la partie interceptée par la pyramide;

3° La représentation en vraie grandeur de la face NQ*d* de ce solide.

XIII. Année 1895. — *On donne* (fig. 359) : 1° Le plan horizontal α;

2° Deux points M et N dans le plan α;

3° Une droite *d*.

On demande : 1° De mener par N un plan perpendiculaire aux plans (*d*, M) et (*d*, N);

2° De représenter l'angle trièdre formé par le plan ainsi mené et par les plans (*d*, *M*) et (*d*, N);

3° De représenter en vraie grandeur les trois angles au sommet (faces);

4° De représenter le tétraèdre dont un des angles solides est le trièdre construit et dont la face opposée à ce trièdre est placée dans le plan α.

XIV. Année 1896. — Par un point M, mener une droite qui s'appuie sur les deux droites AB, CD (fig. 360).

Déterminer en vraie grandeur les faces du trièdre formé par le plan horizontal contenant le point M, et par les plans MAB et MCD.

N.B. Le cadre rectangulaire de cette épure a 220 mm. de largeur et 330 mm. de hauteur.

XV. Année 1897. — *On donne* (fig. 361) : 1° Une droite de front *d*;

2° Un point A.

On demande : 1° Une droite de profil issue du point A et s'appuyant sur la droite *d* en un point B;

2° Un point C situé sur *d* et formant avec les points A et B un triangle isocèle ayant son sommet en A;

3° Le centre O du cercle inscrit dans le triangle ABC;

4° La perpendiculaire *p* élevée en O au plan ABC;

5° Le point S situé sur la droite *p*, en arrière du plan de front passant par le point O, à 100 mm. de distance de ce dernier point;

6° La pyramide SABC, en distinguant les arêtes vues des arêtes cachées.

XVI. Année 1898. — *On donne* (fig. 362) une droite horizontale *1* et la projection verticale A^v d'un point A situé sur cette droite.

On demande : 1° De trouver la projection horizontale A^h du point A;

2° De porter, sur la droite *1*, à partir du point A et à droite de ce point, une longueur AB égale à 60 mm.;

3° De construire un carré ayant AB pour côté, ce carré devant se trouver dans un plan faisant avec la partie antérieure d'un plan horizontal et au-dessus de ce dernier plan, un angle de 30°;

4° De déterminer le centre O de ce carré;

5° D'élever au-dessus du plan du carré, une perpendiculaire OS à ce plan, égale à 70 mm.;

6° De représenter la pyramide ayant pour sommet le point S, et pour base le carré;

7° De distinguer les arêtes vues et les arêtes cachées;

8° De déterminer la vraie grandeur de la section faite dans cette pyramide, par le plan de profil passant par le point A.

XVII. Année 1899. — *On donne* (fig. 363) : Les deux points B et C,

2° Le plan horizontal α qui contient ces deux points.

On demande : 1° De dessiner les projections du triangle ABC situé dans le plan α, sachant que le point A est en avant des points B et C et que les côtés AB et AC ont respectivement 85 et 60 mm. de longueur;

2° De construire les projections des arêtes d'un tétraèdre SABC situé au-dessus du plan α sachant que les angles plans SBA et SBC de l'angle trièdre B sont res-

pectivement égaux à 47° et 55° et que la face SCA du tétraèdre fait avec la base ABC un angle de 74°;

3° De construire dans le tétraèdre, la hauteur partant du sommet B;

4° De déterminer la longueur de cette hauteur.

XVIII. Année 1900. — *On donne* (fig. 364) : 1° Le sommet S d'une pyramide triangulaire;

2° Les directions *a*, *b*, *c* des arêtes partant du sommet (*b* est une horizontale);

3° La longueur (100 mm.) de l'arête SA, le point A étant situé sur la direction *a* et au-dessus du point S.

On demande : 1° De construire et de représenter la pyramide sachant que le plan de sa base ABC est normal à l'arête SA;

2° De déterminer, par un rabattement, la vraie grandeur de cette base ABC.

XIX. Année 1901. — *On donne* (fig. 365) la droite *a* et les points A et S.

On demande : 1° De construire les projections d'un triangle ABC sachant que le côté BC est situé sur la droite *a* et qu'il a 90 mm. de longueur, que le côté AB a 138 mm. de longueur, que l'angle B est aigu et que le point B se trouve à droite du point A;

2° De construire les projections d'un point D du plan (*a*, A), sachant que BD = CD = 170 mm. et que les points A et D sont situés du même côté de *a*;

3° De mener par le point S, une normale au plan (*a*, A) et de déterminer son point d'intersection avec ce plan.

XX. Année 1902. — *On donne* (fig. 366) : Le point A et la droite *d* passant par ce point.

On demande : 1° De porter sur *d*, à partir de A et en arrière de ce point une longueur AB égale à 100 mm.;

2° De construire dans le plan mené par *d* parallèlement à la ligne de terre, le carré dont AB est un côté et dont les sommets C et D sont situés à gauche de B;

3° D'élever au centre O du carré, une perpendiculaire à son plan et de porter au-dessus et au-dessous de O, sur cette perpendiculaire, des longueurs OE et OF égales à la demi-diagonale OA;

4° De construire et de représenter l'octaèdre régulier EABCDF en le considérant comme un corps plein et opaque.

XXI. Année 1903. — *On donne* (fig. 367) les droites *a*, *b*, *c*.

On demande : 1° De trouver les projections d'une droite *d* parallèle à *a* et qui s'appuie sur *b* et *c*. Le point d'appui sur *b* sera désigné par A, le point d'appui sur *c* sera désigné par B.

2° De construire les projections des arêtes d'un parallélépipède sachant :

α) Qu'une première arête se termine d'une part au point A, d'autre part au point C situé sur la droite *b*, à droite de A et à 80 mm. de ce dernier point;

β) Qu'une seconde arête est la droite AB;

γ) Qu'une troisième arête se termine d'une part au point B et d'autre part à un point D situé sur la droite *c*, à droite du point B et à 86 mm. de ce dernier point.

3° De représenter le parallélépipède en le considérant comme un corps plein et opaque;

4° De chercher, par un rabattement, la vraie grandeur du parallélogramme diagonal passant par l'arête BD.

XXII. Année 1904. — *On donne* (fig. 368) : 1° Une droite *a* et un point O sur cette droite;

2° La projection verticale A^v d'un point A.

On demande : 1° De mener par le point O, un plan α perpendiculaire à *a*;

2° De déterminer la projection horizontale du point A considéré comme appartenant à ce plan;

3° De construire dans le plan α un carré ABCD dont le point O serait le centre et le point A un des sommets;

4° De construire un cube situé au-dessus du plan α et dont l'une des faces serait le carré ABCD;

5° De représenter ce cube en le considérant comme un corps plein et opaque.

XXIII. Année 1905. — *On donne* (fig. 369) un point A et une droite *d*.

On demande : 1° De mener par le point A en avant et au-dessus de ce point, un plan α parallèle à la ligne de terre et faisant avec le plan horizontal un angle de 40°;

2° De déterminer le point B, intersection du plan α et de la droile *d*;

3° De déterminer dans le plan α et à droite du point B, un point C qui soit distant des points A et B respectivement de 116 et de 72 mm.;

4° De déterminer sur la droite *d* et au-dessus du point B, un point D distant de B de 114 mm.;

5° De représenter le tétraédre ABCD considéré comme un corps plein et opaque;

XXIV. Année 1906. — *On donne* (fig. 370) : 1° Un plan α parallèle à la ligne de terre et passant par deux points A et B;

2° Un point M.

On demande : 1° De déterminer les projections d'un carré ABCD placé dans le plan α, en avant et au-dessus du point B, et dont le côté serait AB;

2° De mener par les sommets de ce carré, des perpendiculaires au plan α et de ne considérer sur ces droites que les portions situées au-dessus du plan α;

3° De déterminer sur la perpendiculaire qui passe par le point B, un point B′ situé au-dessus du point B et distant de celui-ci d'une longueur égale à 80 mm.;

4° De considérer un plan β parallèle à la droite AB et passant par les points M et B′;

5° De chercher l'intersection de ce plan β et des plans parallèles deux à deux passant par les côtés du carré et par les perpendiculaires dont il est question dans le 2° ci-dessus;

6° De représenter le solide plein et opaque compris entre ces plans parallèles et les plans α et β.

XXV. Année 1907. — *On donne* (fig. 371) un plan (A, *a*) parallèle à la ligne de terre et une droite *b*.

On demande : 1° De chercher l'intersection B de la droite *b* et du plan (A, *a*);

2° De déterminer les projections d'un triangle ABC situé dans le plan (A, *a*), en arrière et au-dessous de AB, sachant que les côtés AC et BC ont respectivement 120 mm. et 115 mm. de longueur;

3° De déterminer sur la droite *b* un point D situé au-dessus du point B et qui soit distant de ce point d'une longueur égale à 100 mm.;

4° De représenter, en le considérant comme un corps plein et opaque, le prisme qui a comme base le triangle ABC et comme arête latérale la droite BD.

FIN DU LIVRE PREMIER.

ERRATA.

(Nous n'indiquons que les corrections essentielles).

Page VIII, après la ligne 3, *ajoutez* : En 1860, dans son Traité de Géométrie Descriptive, De La Gournerie déplace la ligne de terre parallèlement à elle-même et ajoute : « Le plan horizontal s'est ainsi trouvé élevé.... et le plan vertical « reculé de la même quantité. Ces translations ne modifient évidemment en rien ni « les projections de la figure de l'espace, ni leurs positions relatives. Quand une « épure contient seulement des projections, la position de la ligne de terre n'a d'uti- « lité que pour la ponctuation, il suffit de connaître sa direction pour pouvoir « résoudre les problèmes relatifs au système géométrique représenté ».

Remarquons qu'une épure ne contient jamais que des projections et il est certain, d'après la citation précédente, que si De La Gournerie ne s'était pas inquiété de l'opacité des plans de projection, il aurait fait disparaître, de ses épures, le tracé de la ligne de terre.

Page 28, lignes 1 et 20, *au lieu de* et, *lisez* ou.

Page 29, ligne 2, *au lieu de* fig. 20, *lisez* fig. 21.

Page 52, ligne 16, *après* demandé, *mettez* si les droites choisies dans le plan α ne sont pas parallèles entre elles.

Page 79, ligne 28, *au lieu de* au, *lisez* ou.

Page 83, lignes 18 et 19, *au lieu de* au-dessous, *lisez* près.

Page 87, ligne 7, *au lieu de* i, *lisez* 1.

Page 119, ligne 16, *au lieu de* 159, *lisez* 178.

Page 131, ligne 25, *au lieu de* 207, *lisez* 208.

Page 171, ligne 11, supprimez les parenthèses.

Page 186, dernière ligne, *au lieu de* à, *lisez* au.

TABLE DES MATIÈRES.

COURS
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE
DE
L'ÉCOLE MILITAIRE,

PAR

F. CHOMÉ,

Professeur à l'École Militaire de Belgique.

PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE PREMIER,

à l'usage des candidats à l'École Militaire et aux Écoles Spéciales des Universités.

ATLAS DE 47 PLANCHES.

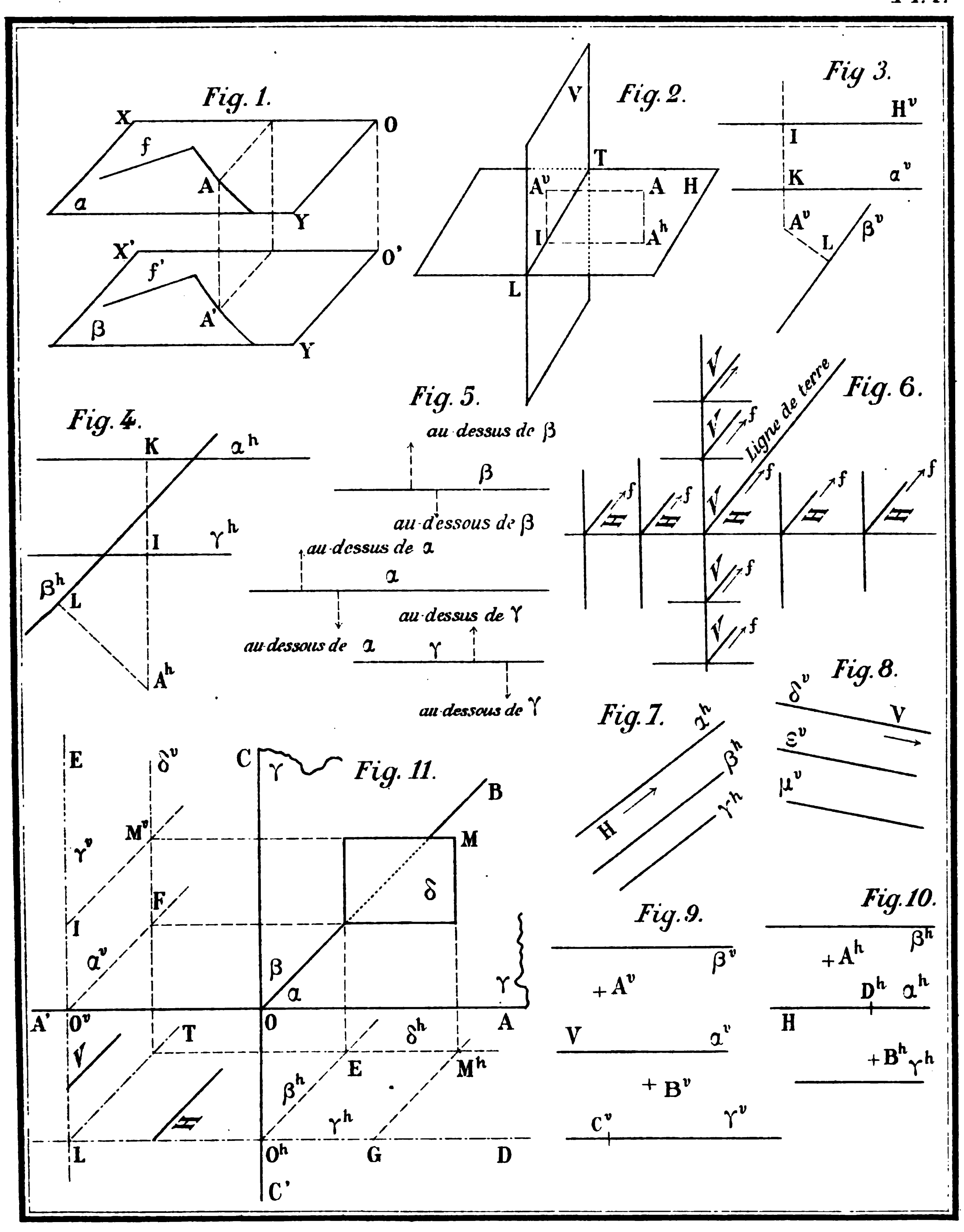
QUATRIÈME ÉDITION,

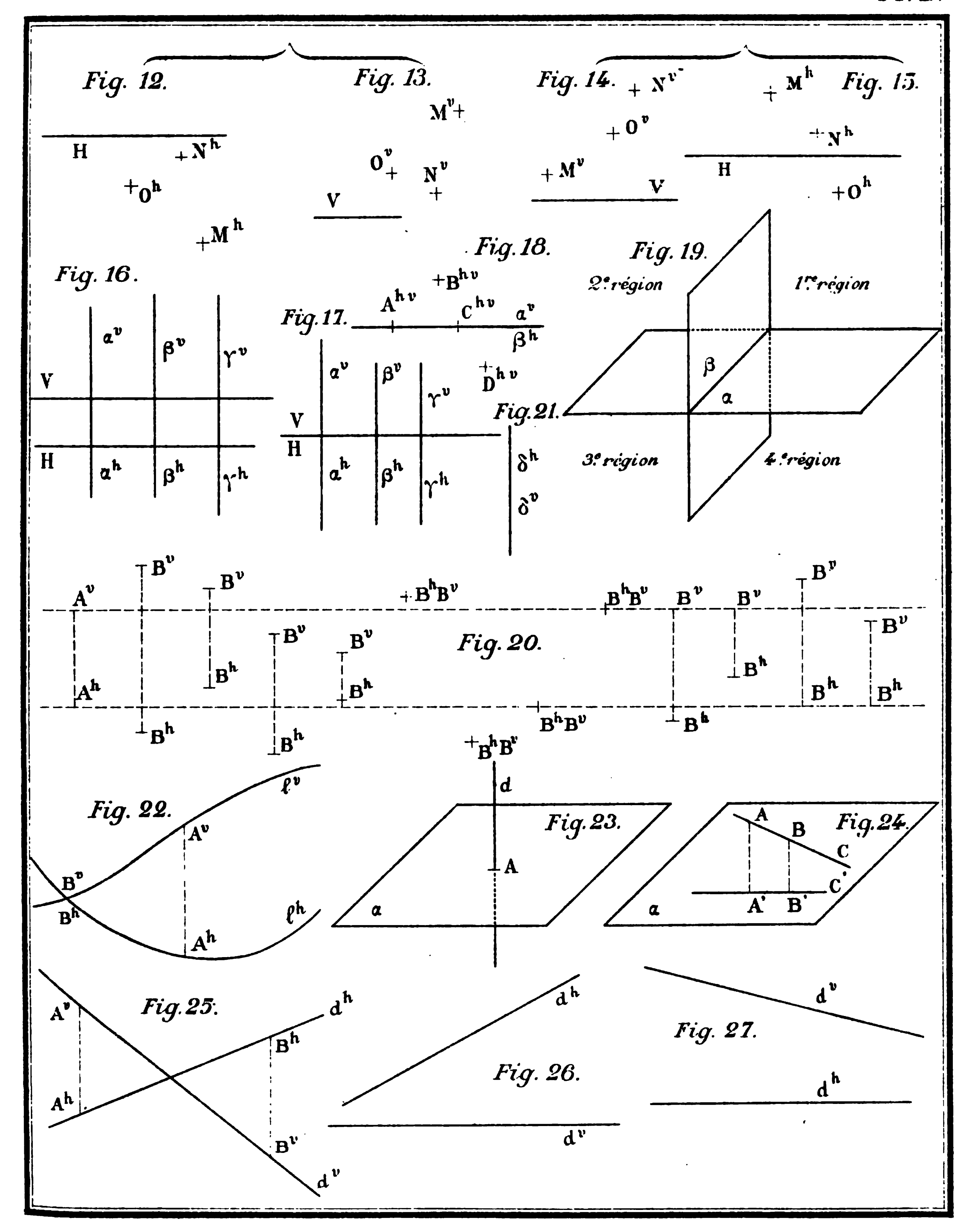
entièrement revue, corrigée et augmentée, contenant les prescriptions à observer pour l'exécution des épures.

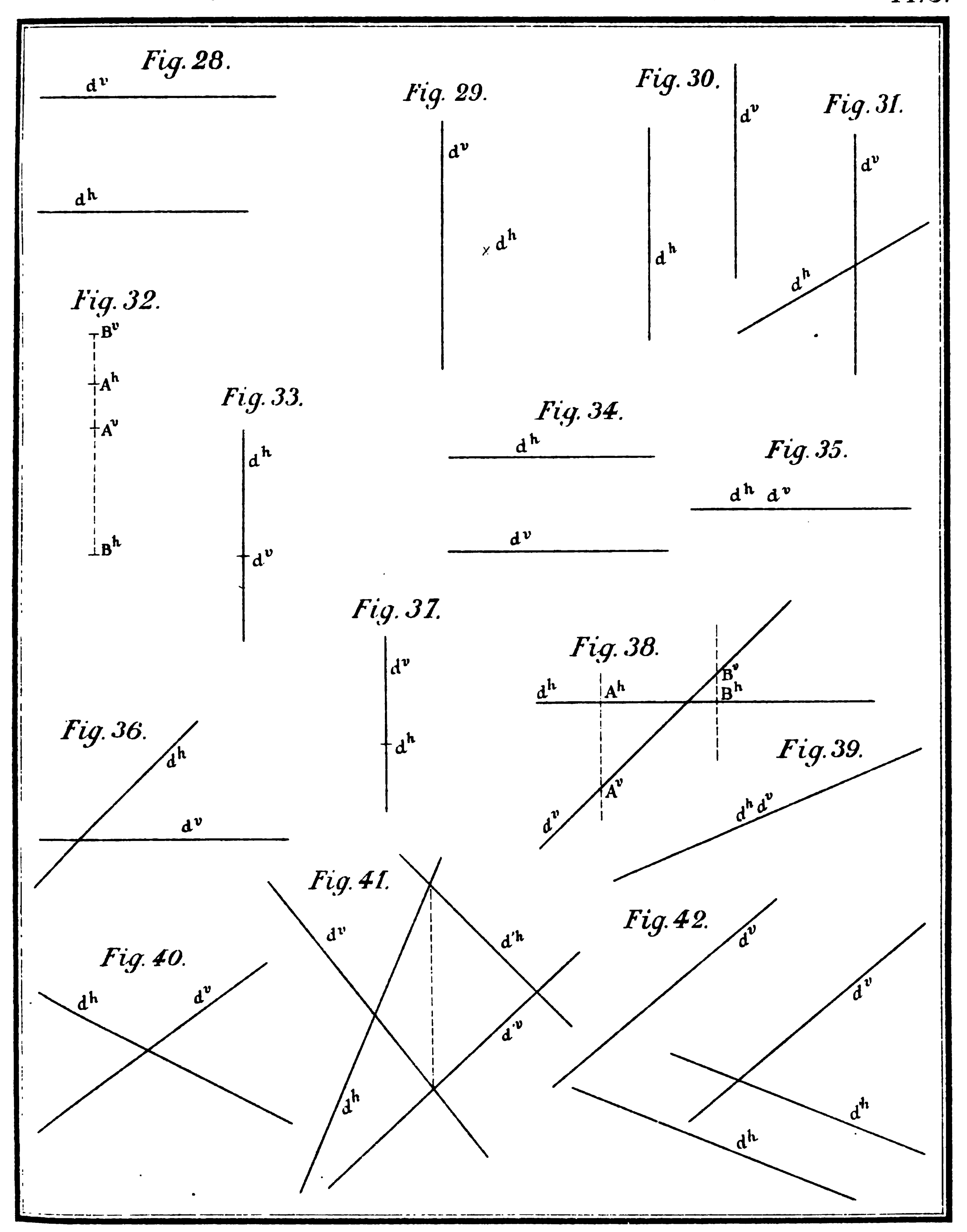
BRUXELLES,
OFFICE DE PUBLICITÉ,
46, Rue de la Madeleine.

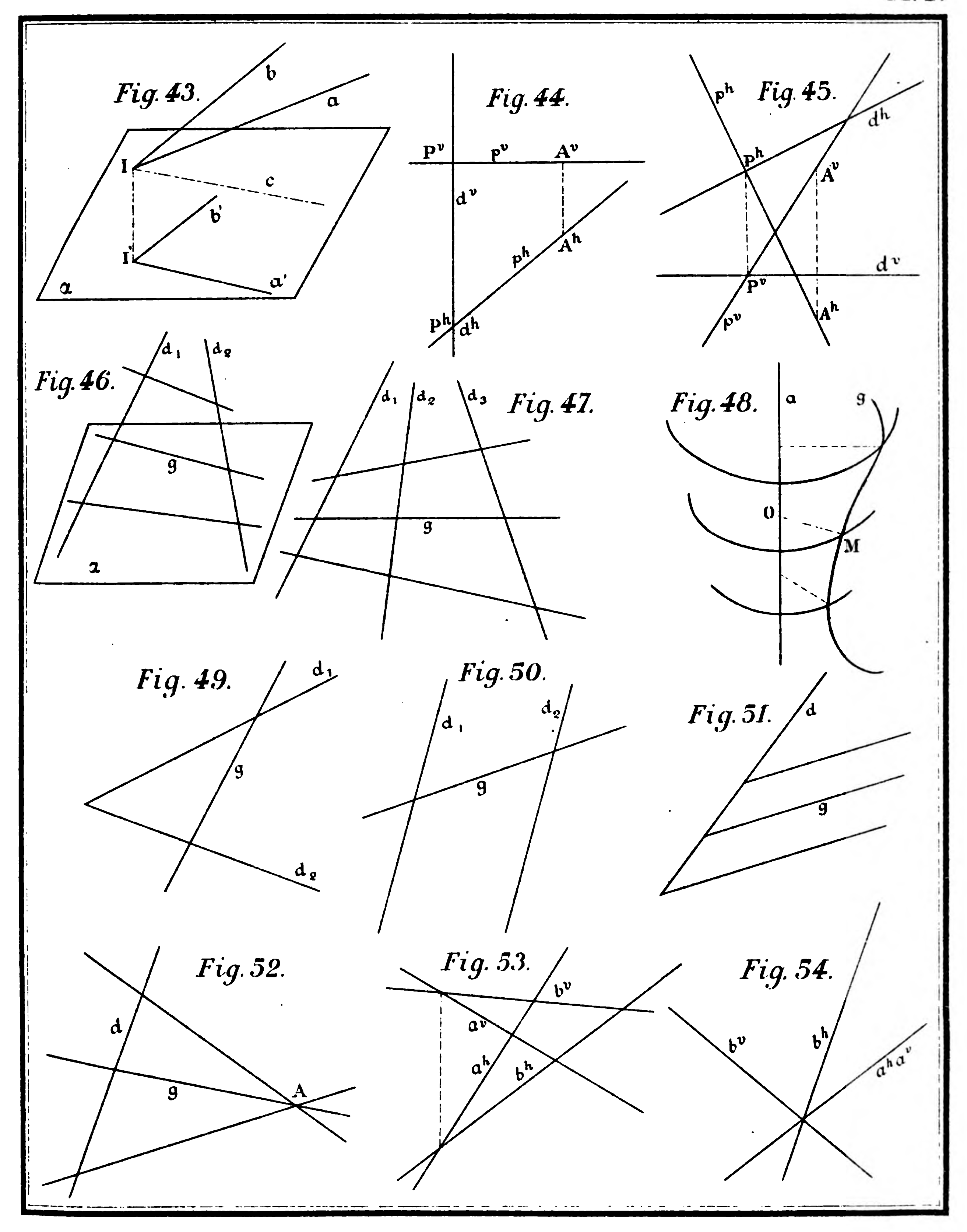
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

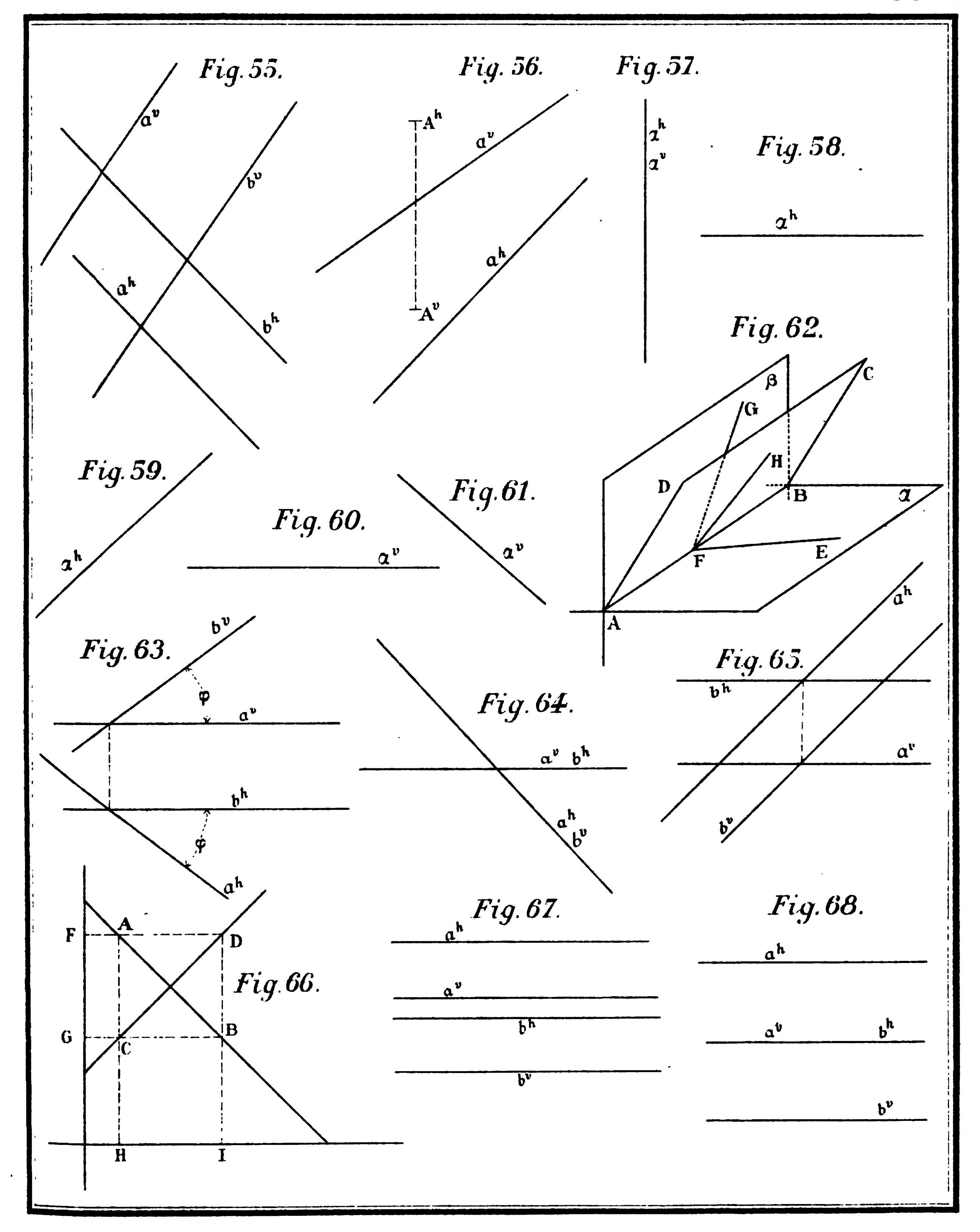
1908.


Fig. 1.
X
O
f
A
a
Y
X'
O'
f'
A'
β
Y
Fig. 2.
V
T
A
H
I
L
Fig 3.
I
K
L
Fig. 4.
K
I
L
Fig. 5.
au dessus de β
β
au dessous de β
au dessus de α
α
au dessus de γ
au dessous de α
γ
au dessous de γ
Fig. 6.
Ligne de terre
f
H
Fig. 7.
H
Fig. 8.
V
Fig. 9.
V
Fig. 10.
H
Fig. 11.
E
C
γ
B
M
F
I
δ
β
α
A'
O
A
T
E
L
G
D
C'


Fig. 12.
H
Fig. 13.
V
Fig. 14.
V
Fig. 15.
H
Fig. 16.
V
H
Fig. 17.
V
H
Fig. 18.
Fig. 19.
2e région
1re région
3e région
4e région
Fig. 21.
Fig. 20.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.


Fig. 28.
d^v
d^h
Fig. 29.
d^v
d^h
Fig. 30.
d^v
d^h
Fig. 31.
d^v
d^h
Fig. 32.
B^v
A^h
A^v
B^h
Fig. 33.
d^h
d^v
Fig. 34.
d^h
d^v
Fig. 35.
d^h d^v
Fig. 36.
d^h
d^v
Fig. 37.
d^v
d^h
Fig. 38.
d^h
A^h
B^v
B^h
A^v
d^v
Fig. 39.
$d^h d^v$
Fig. 40.
d^h
d^v
Fig. 41.
d^v
d'^h
d'^v
d^h
Fig. 42.
d^v
d^v
d^h
d^h


Fig. 43.
b
a
I
c
b'
I'
a'
α
Fig. 44.
Pv
pv
Av
dv
ph
Ah
Ph
dh
Fig. 45.
ph
dh
Ph
Av
dv
Pv
pv
Ah
Fig. 46.
d1
d2
g
α
Fig. 47.
d1
d2
d3
g
Fig. 48.
a
g
O
M
Fig. 49.
d1
g
d2
Fig. 50.
d1
d2
g
Fig. 51.
d
g
Fig. 52.
d
g
A
Fig. 53.
bv
av
ah
bh
Fig. 54.
bv
bh
ah av


Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.

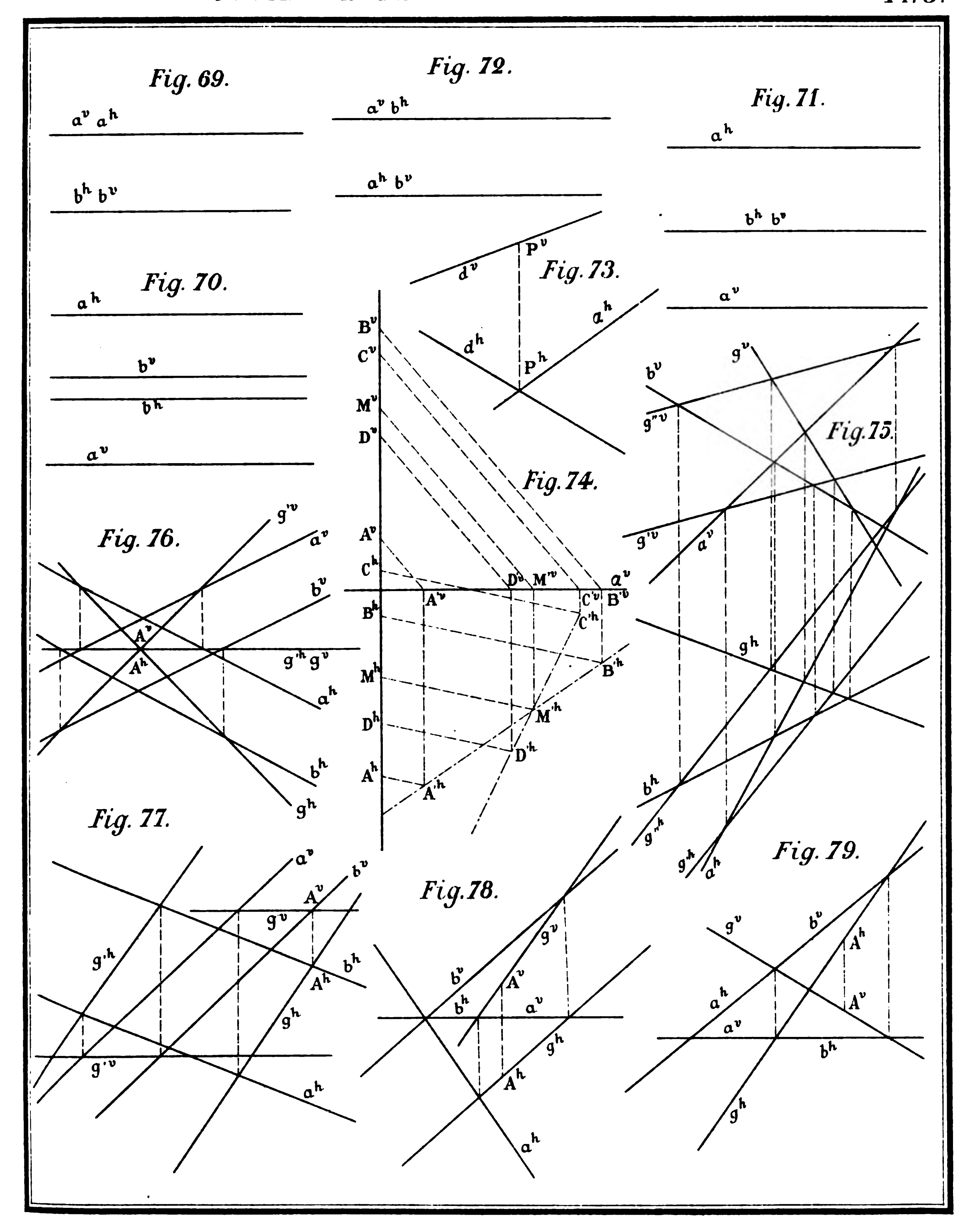
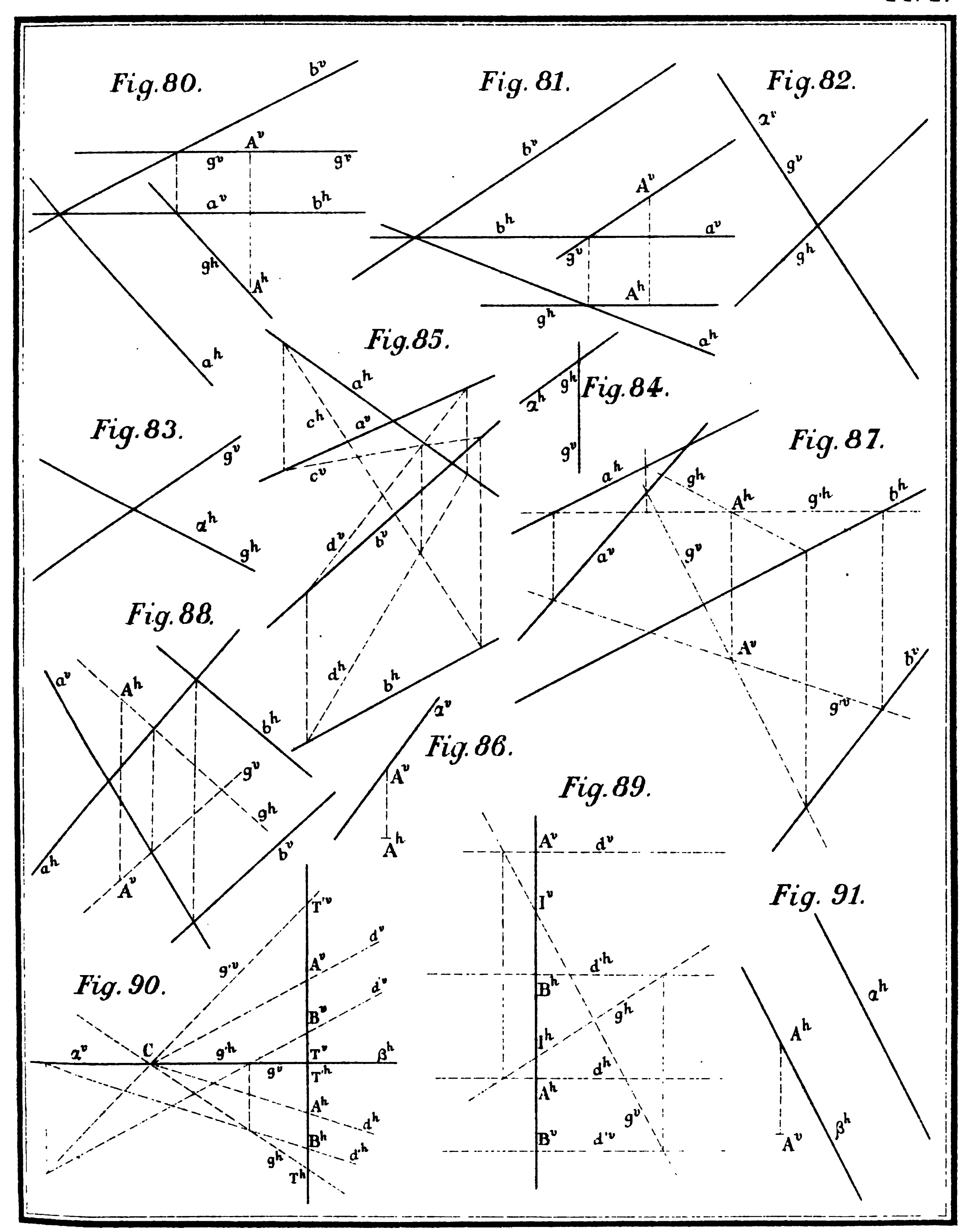
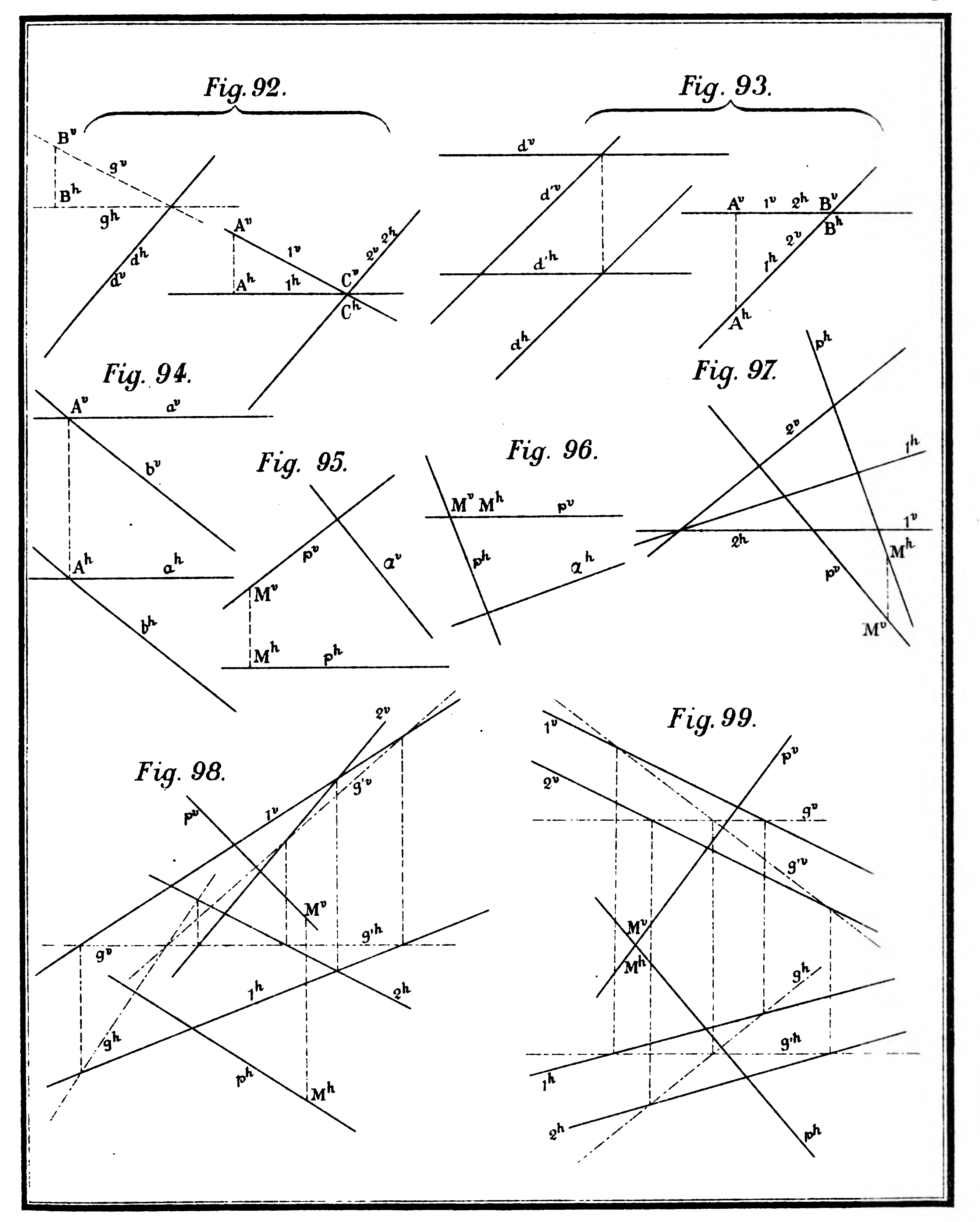


Fig. 69.
Fig. 72.
Fig. 71.
Fig. 70.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.


Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.


Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.

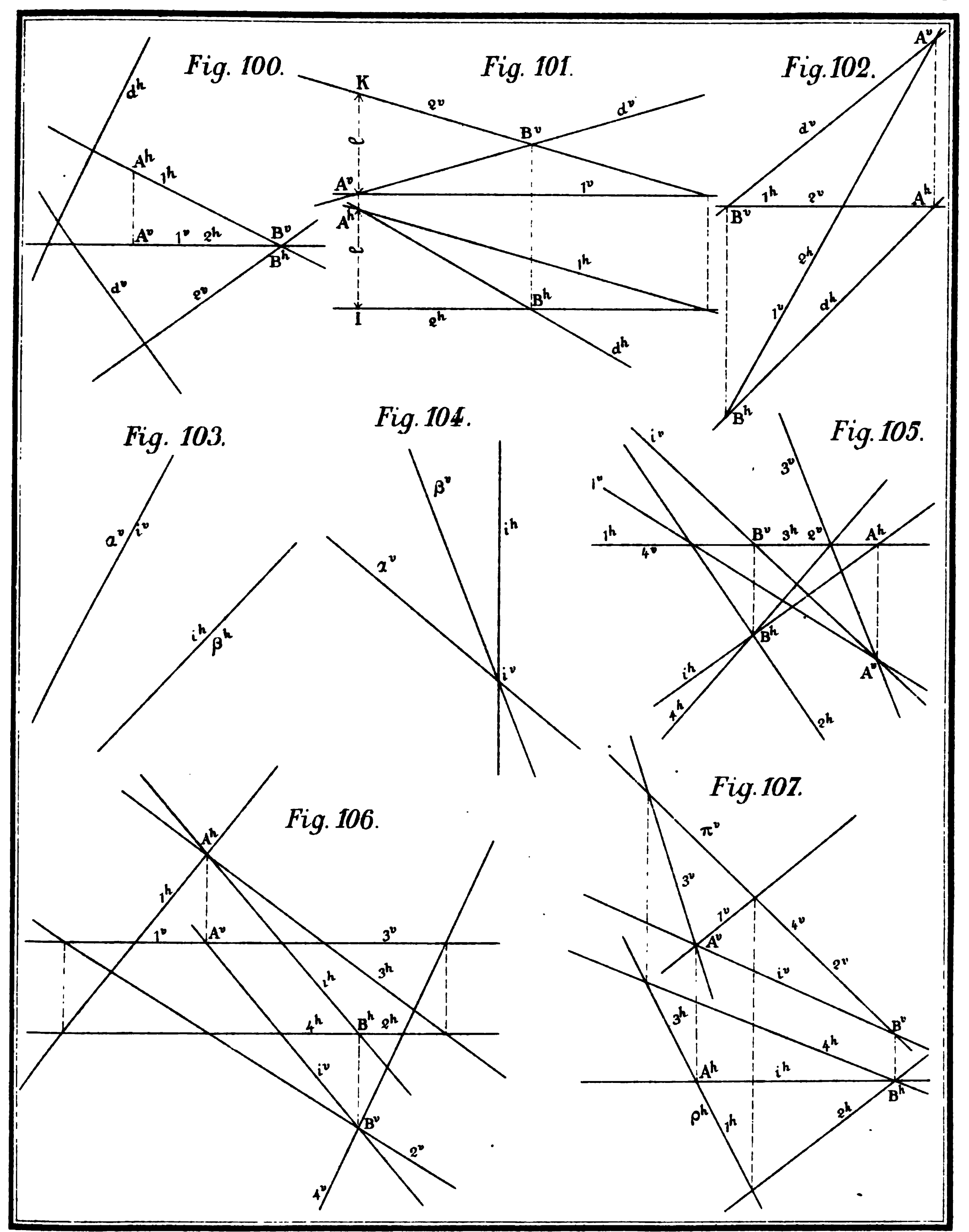


Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.

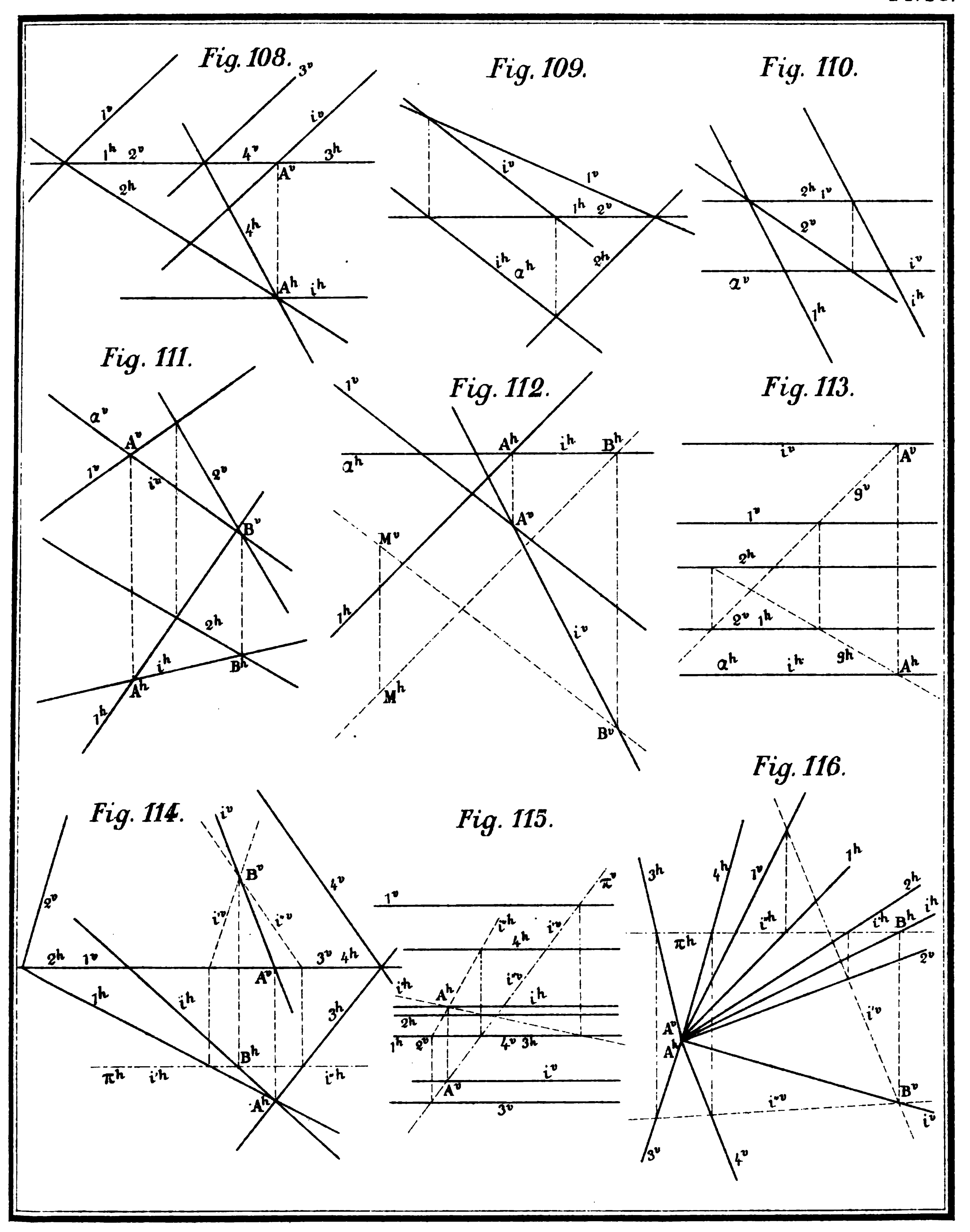
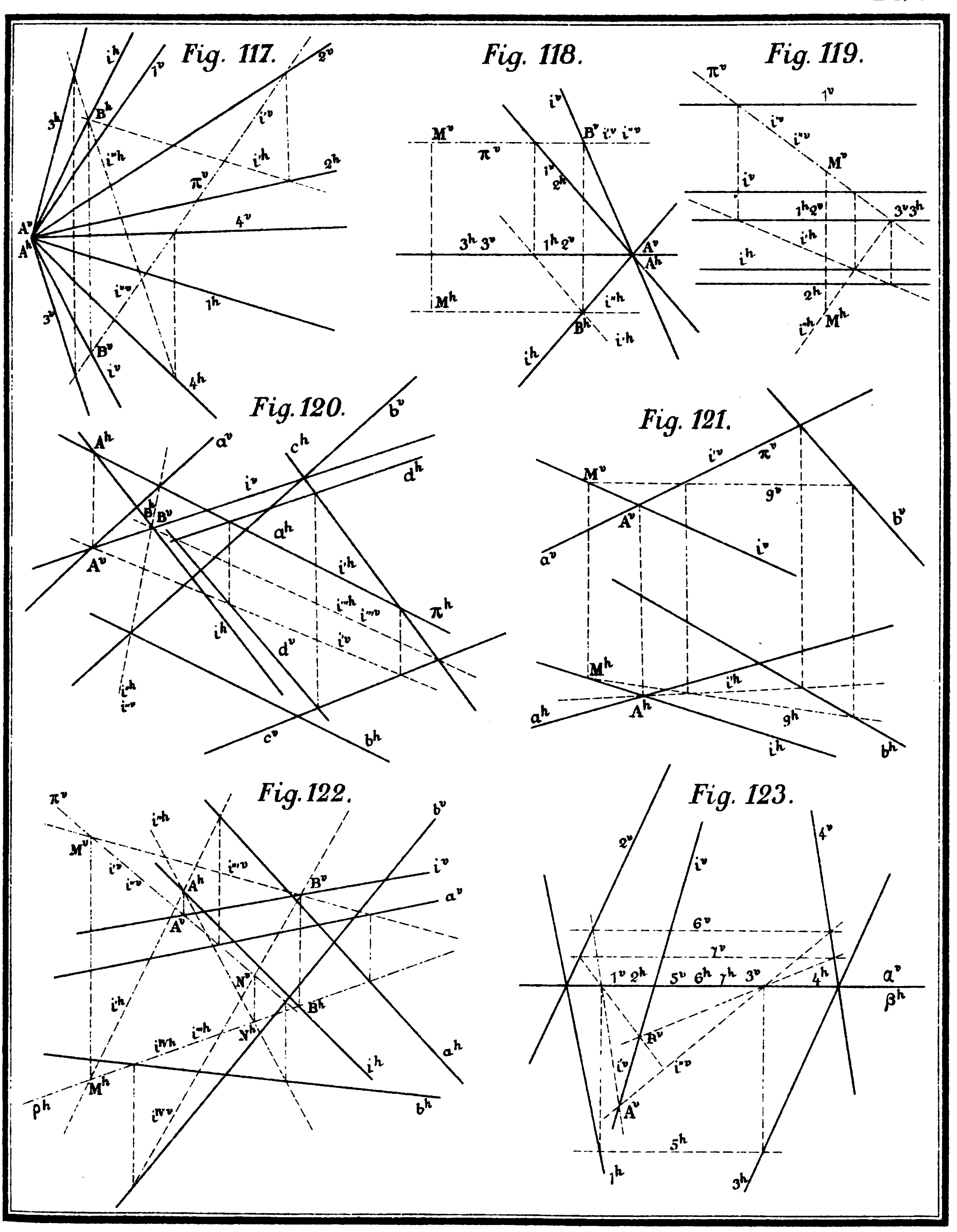
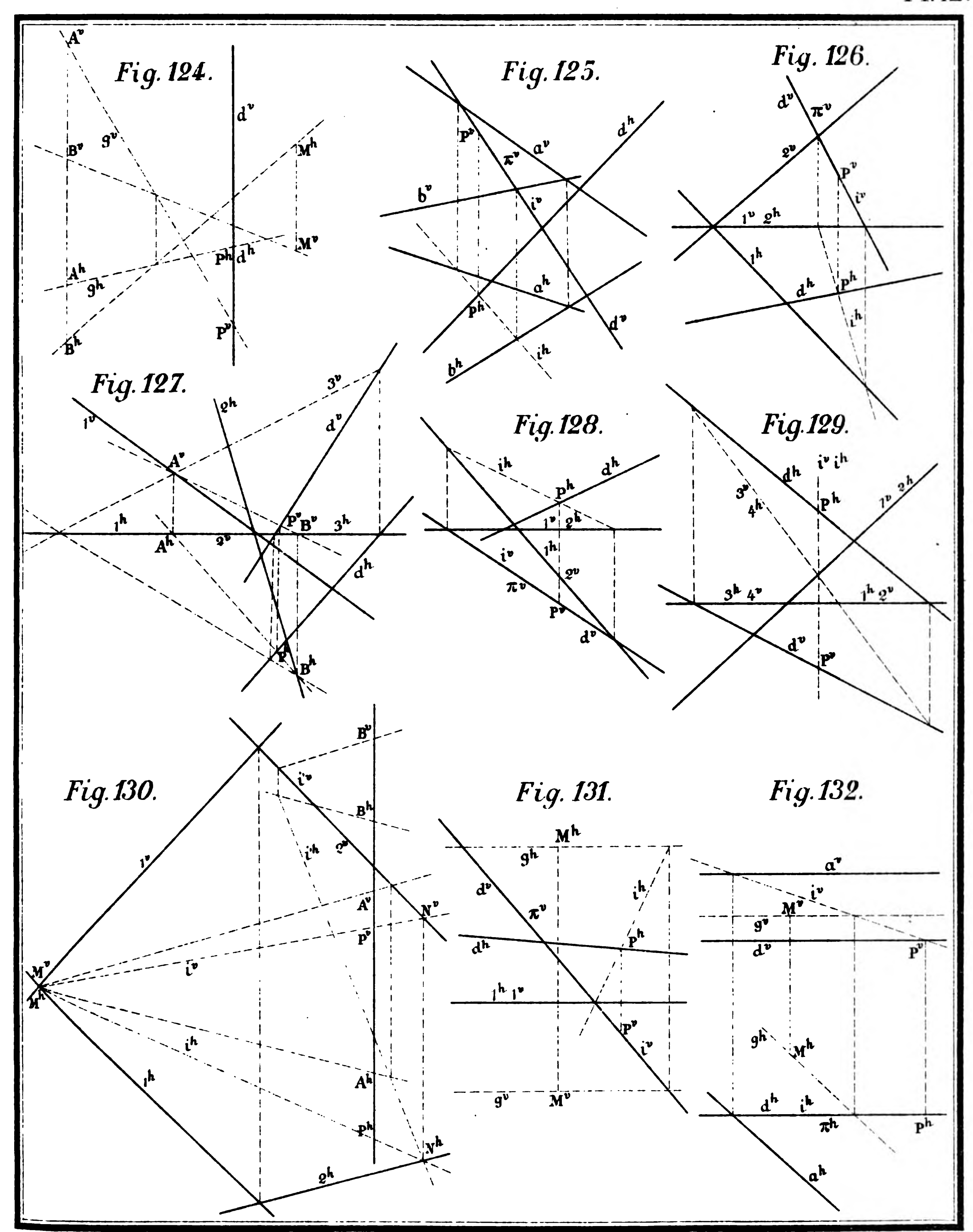
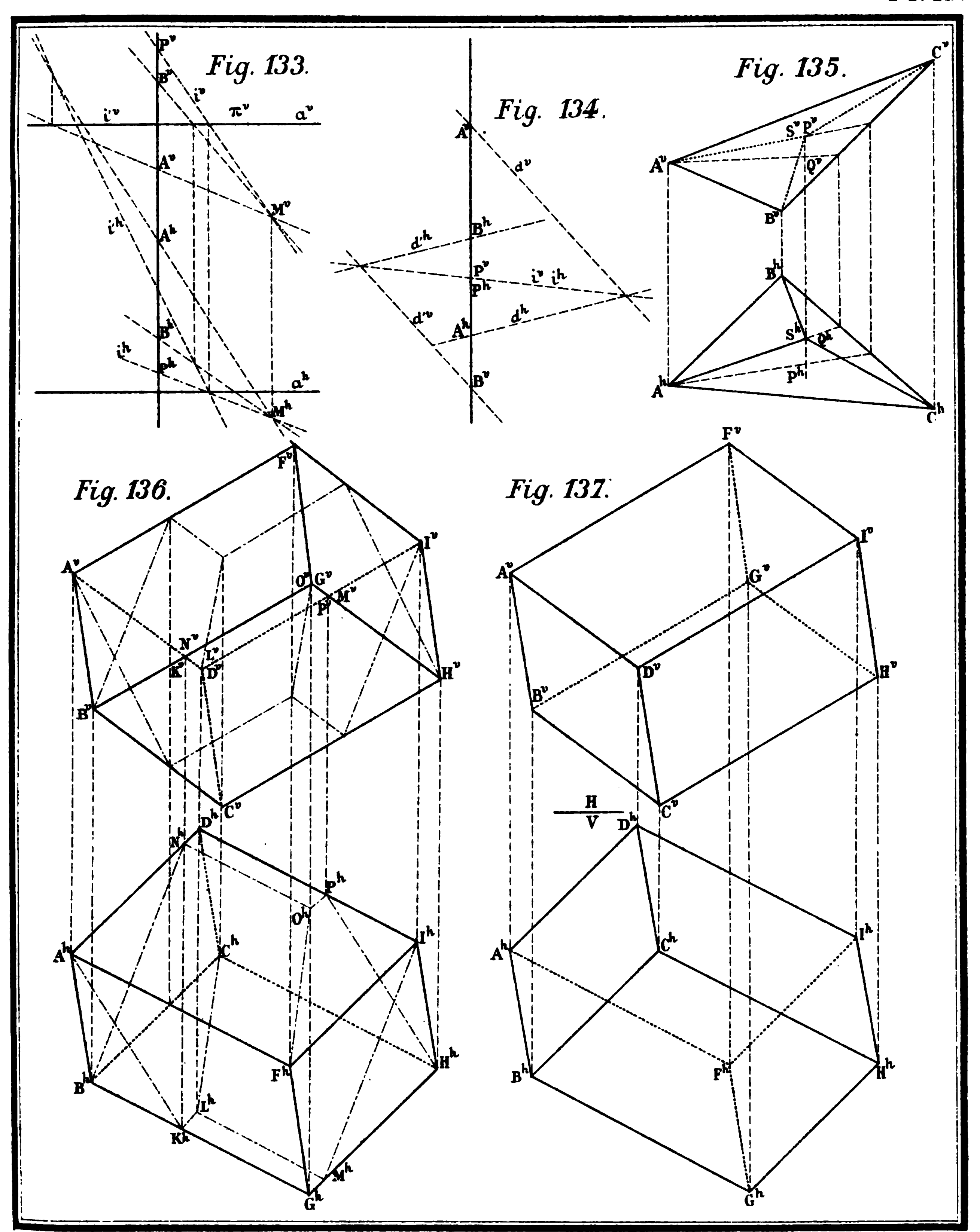
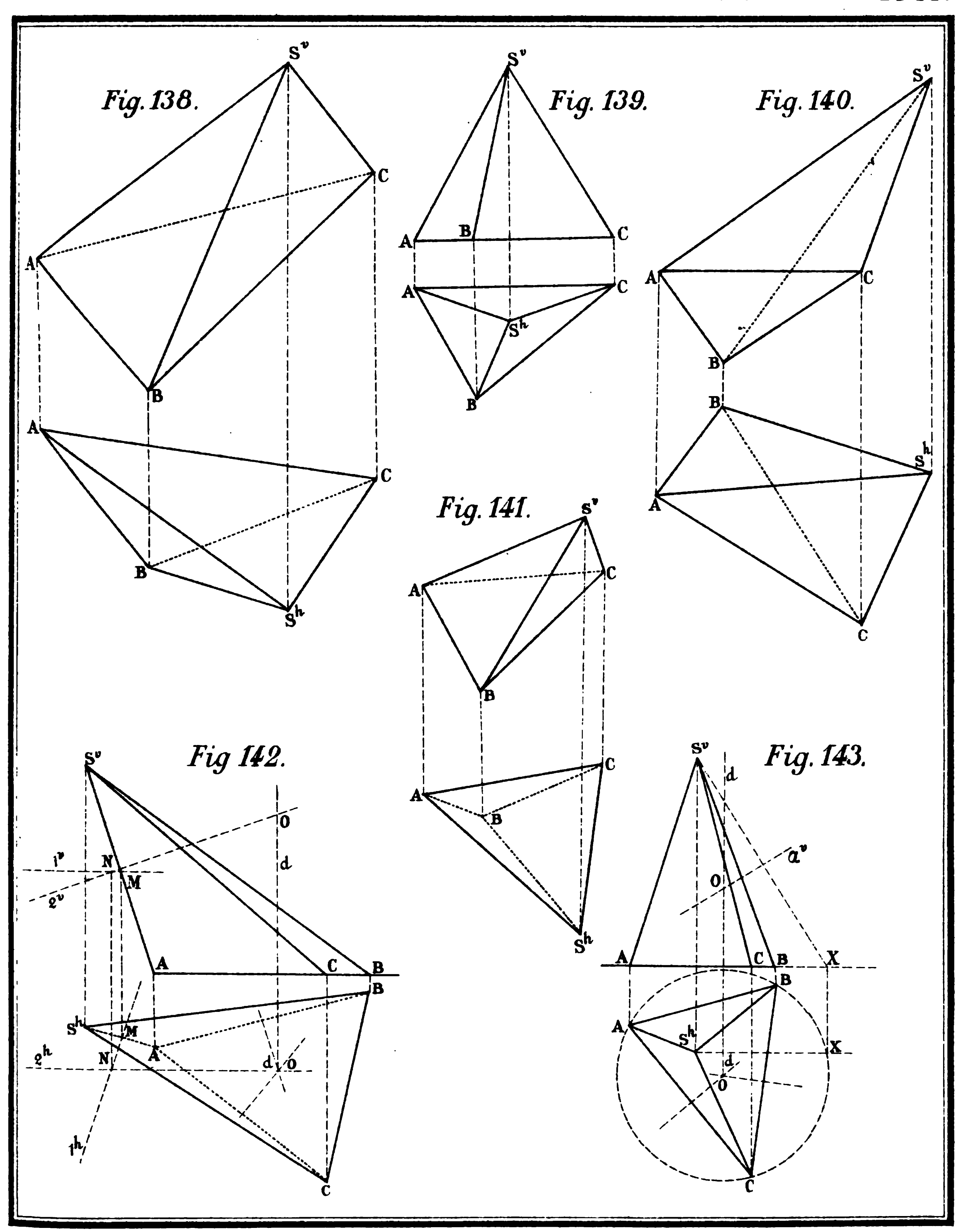


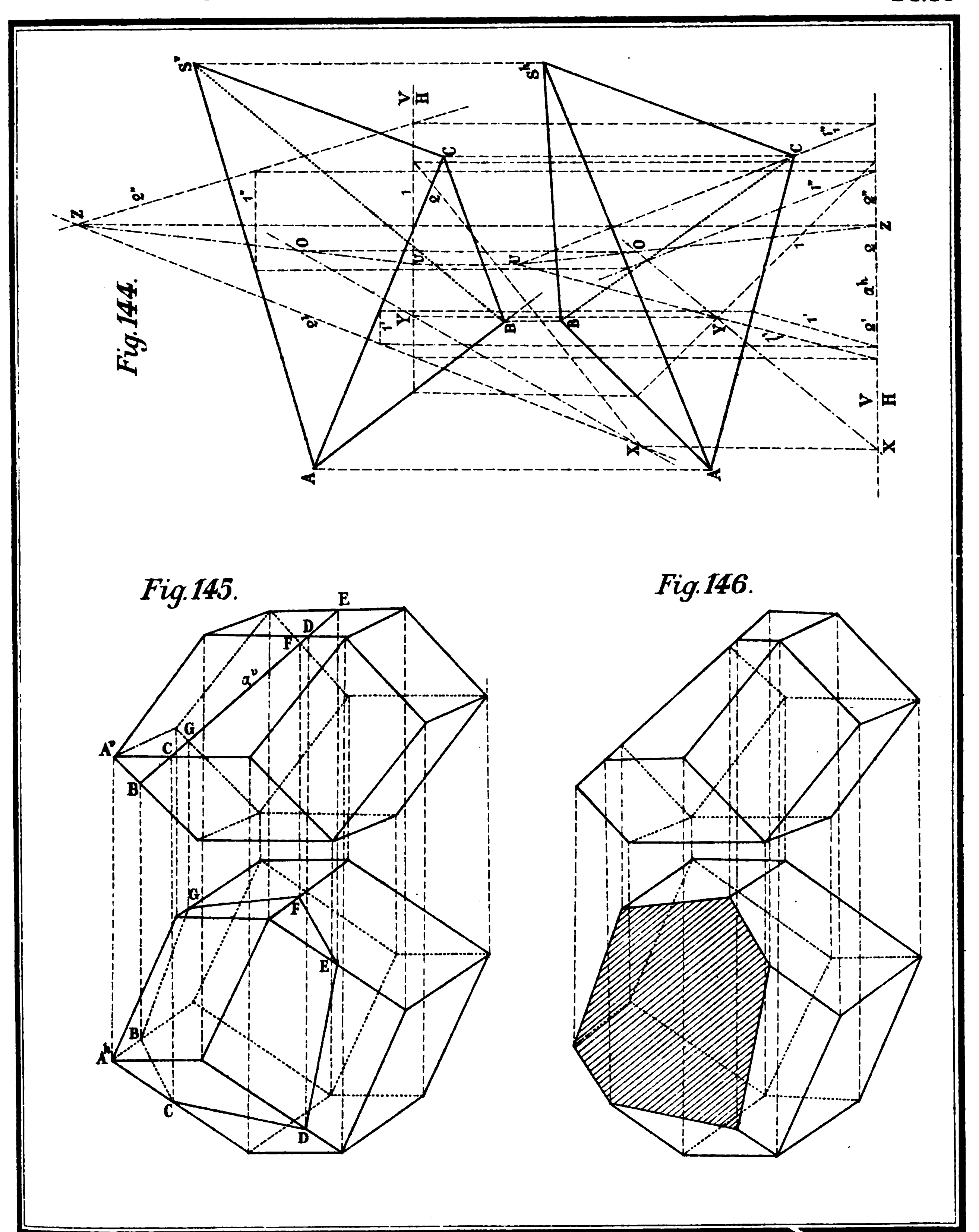
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.

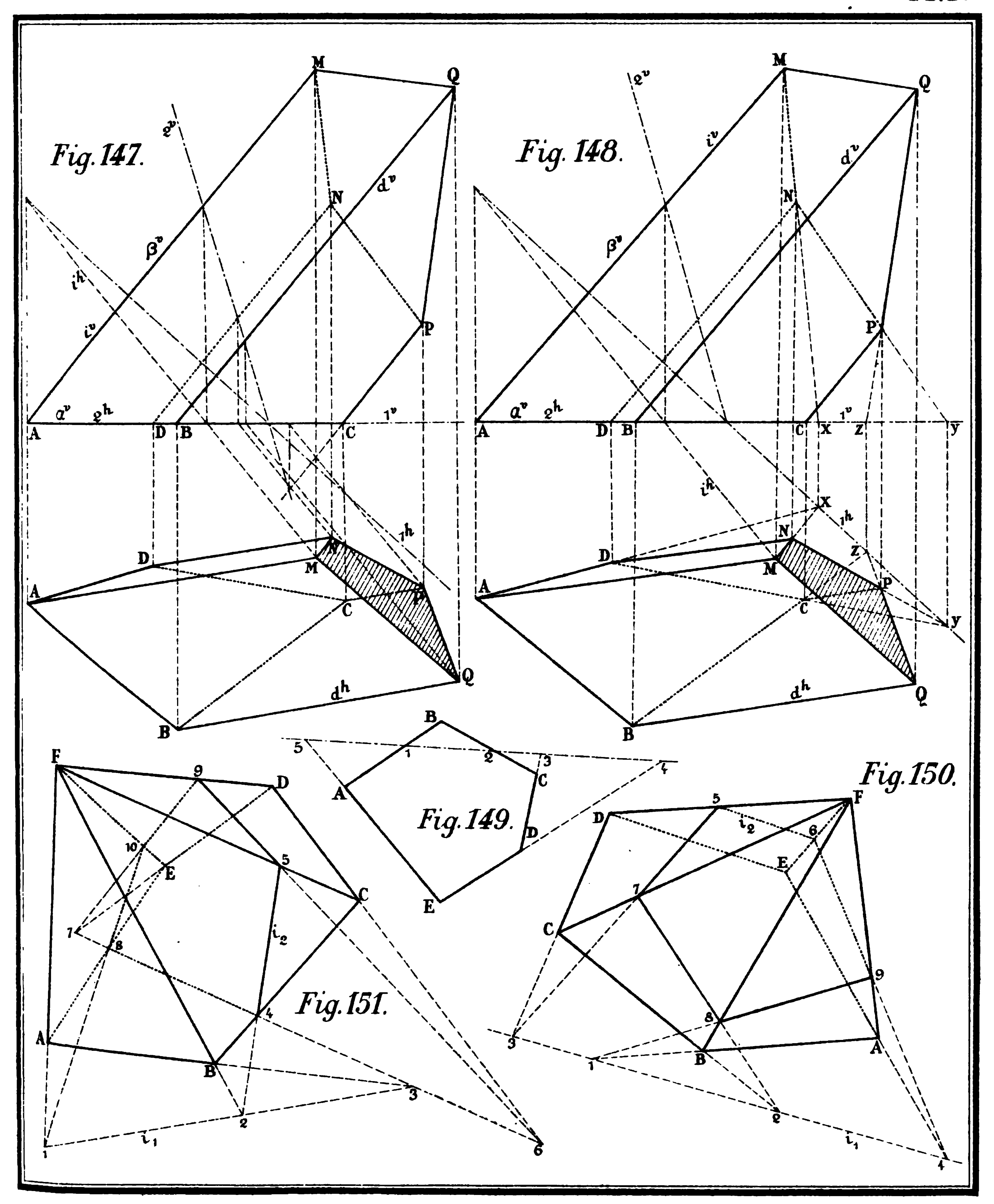

Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.

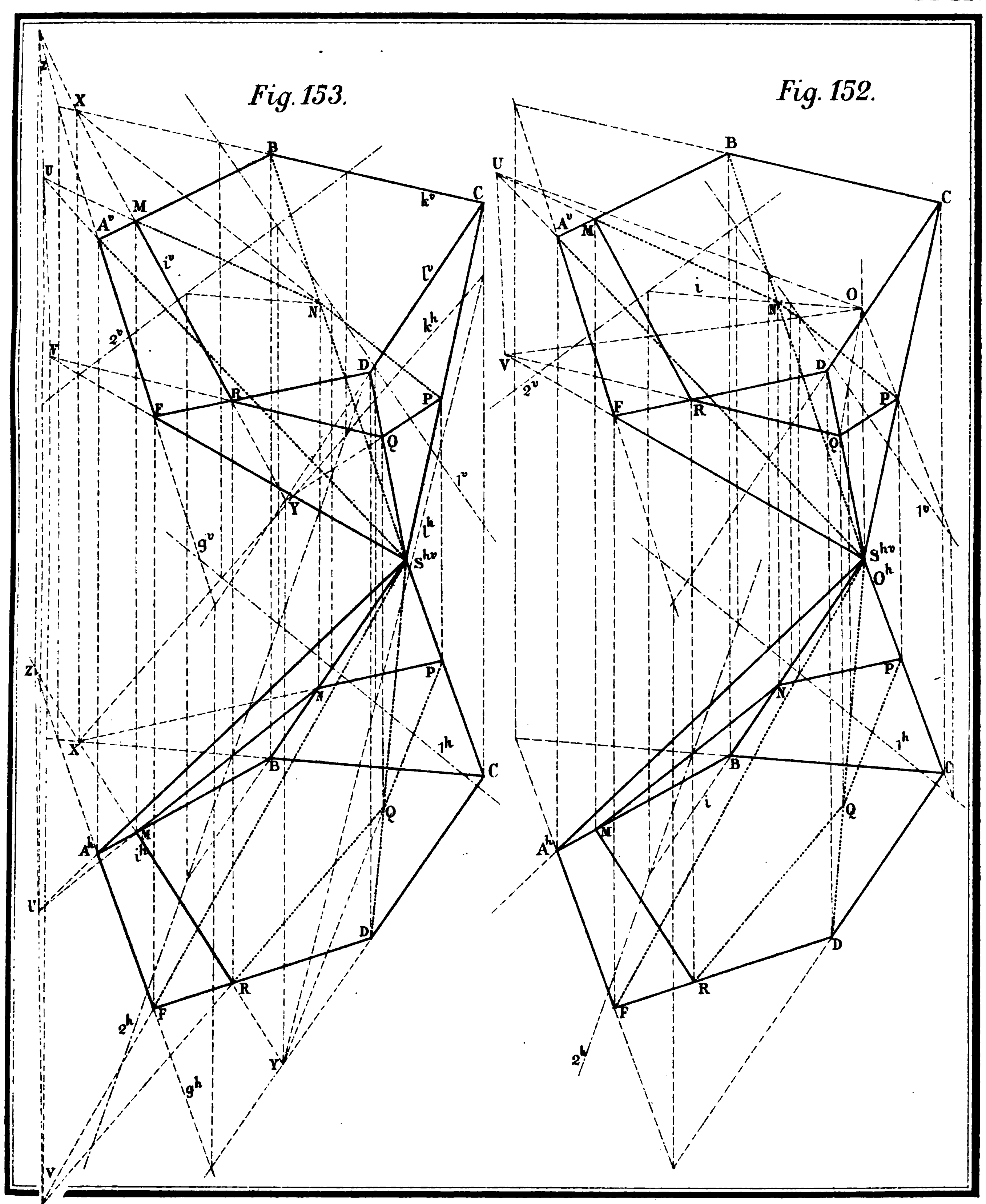

Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.
Fig. 132.

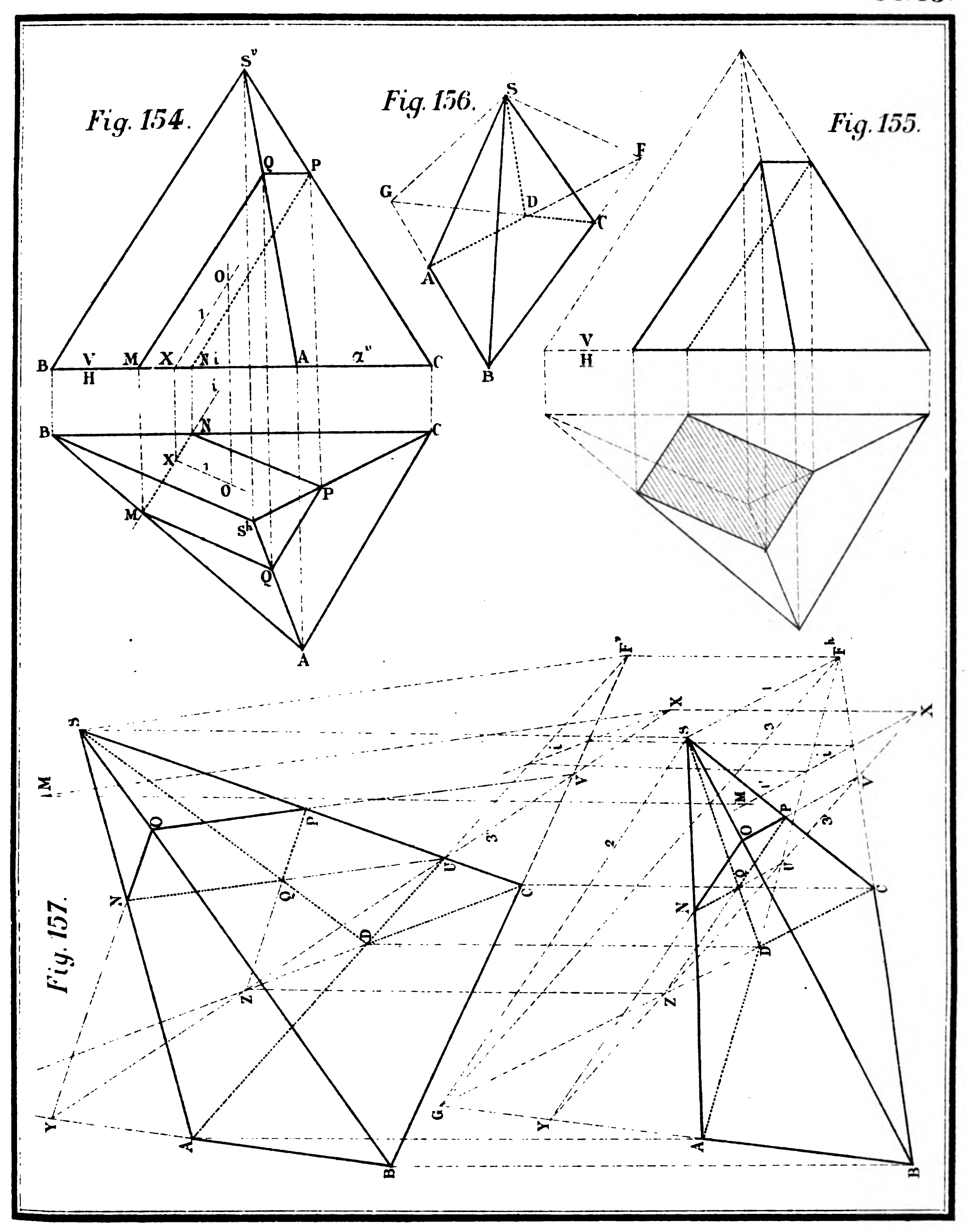

Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
H
V

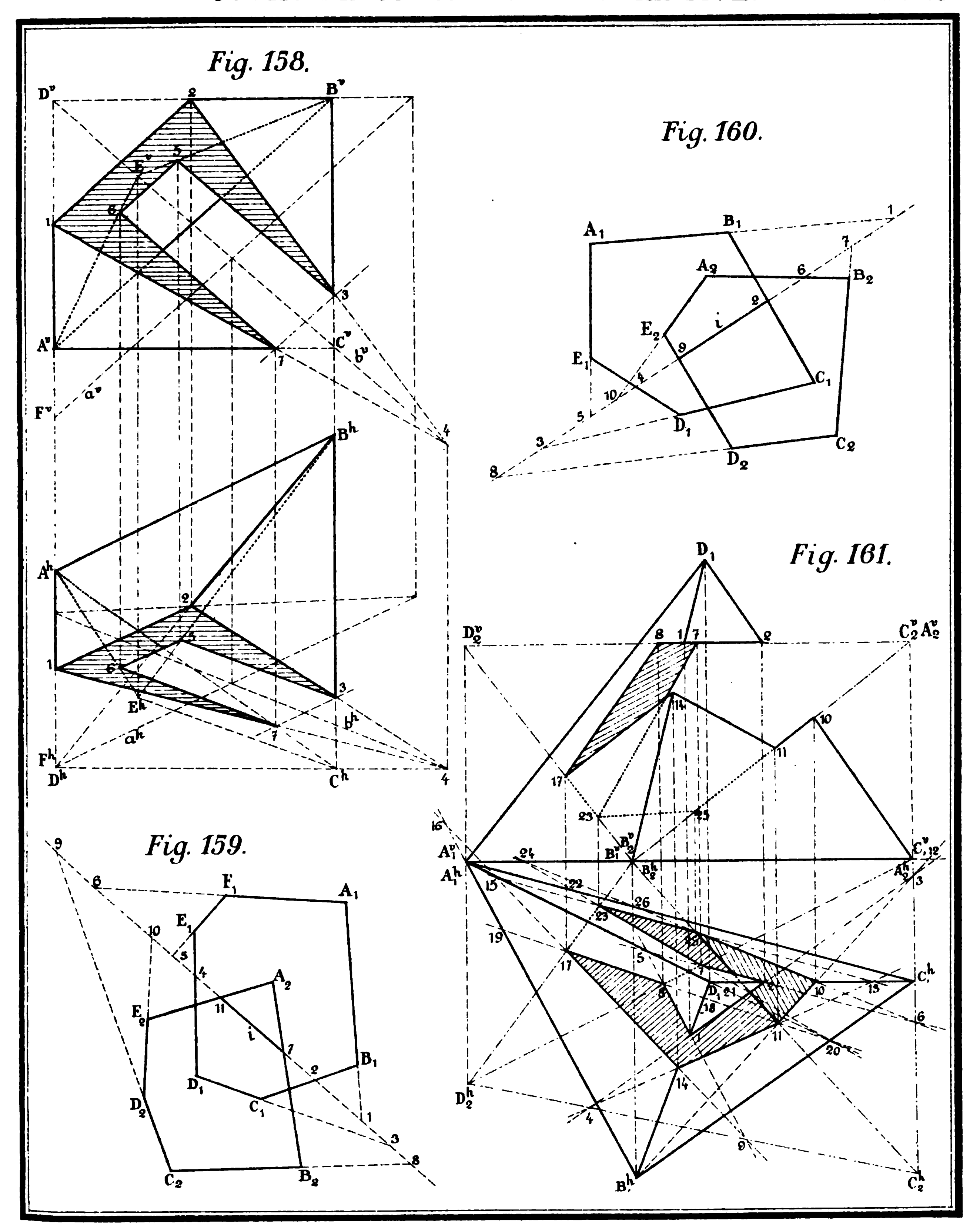

Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig 142.
Fig. 143.


Fig.144.
Fig.145.
Fig.146.


Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.


Fig. 153.
Fig. 152.


Fig. 154.
Fig. 156.
Fig. 155.
Fig. 157.


Fig. 158.
Fig. 159.
Fig. 160.
Fig. 161.

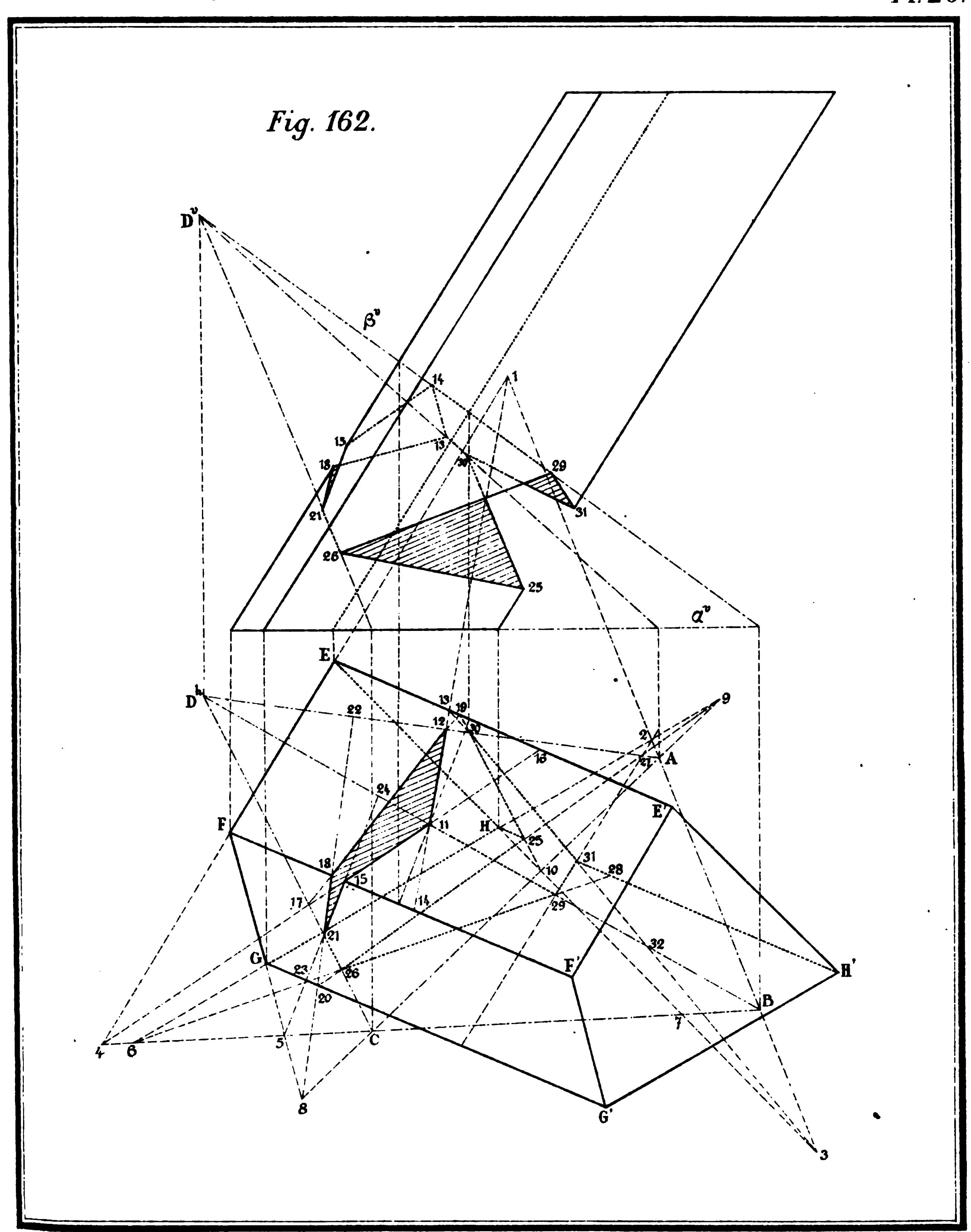

Fig. 162.
D^v
β^v
α^v
D^h
E
E'
F
F'
G
G'
H
H'
A
B
C

Fig. 163.

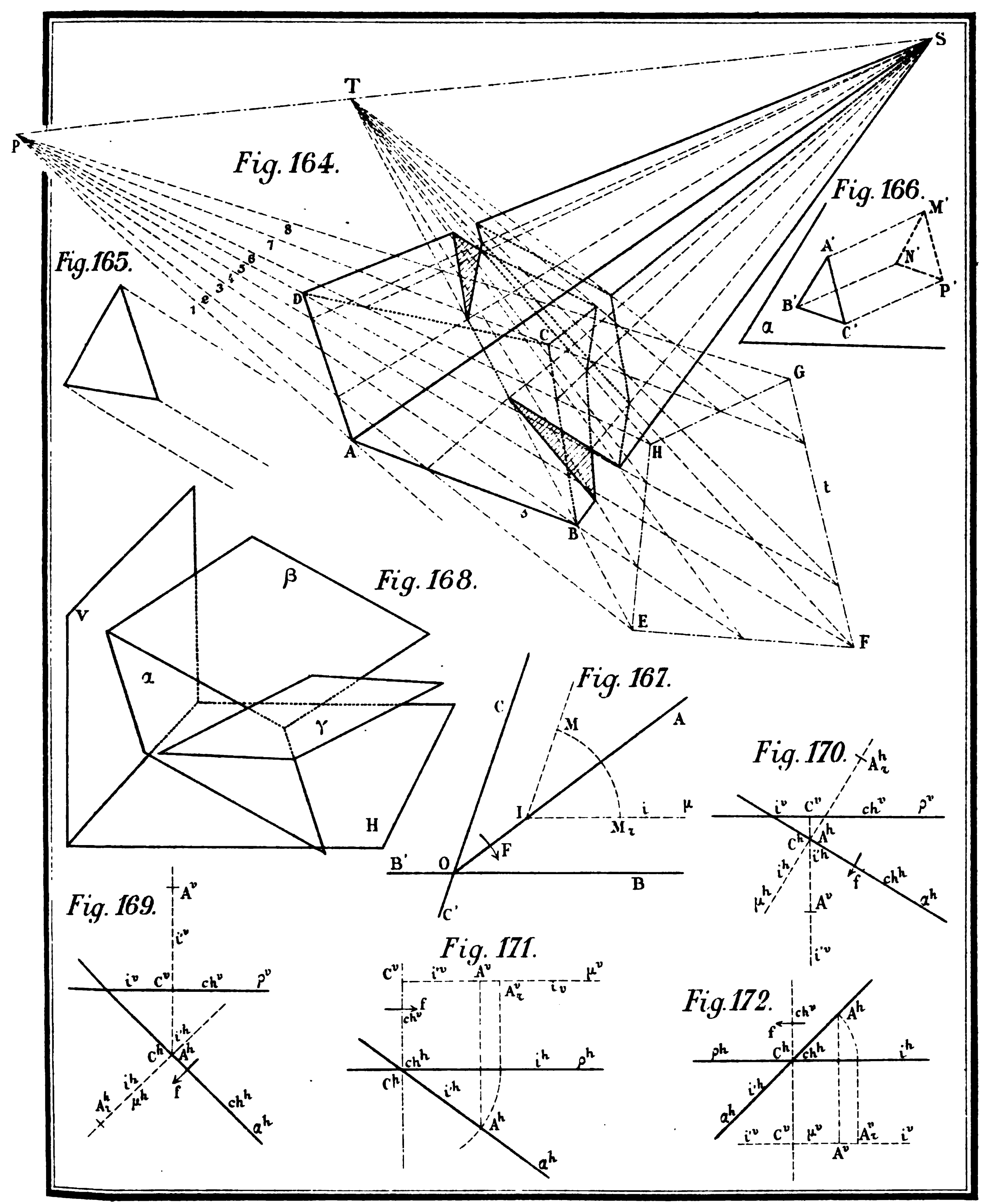
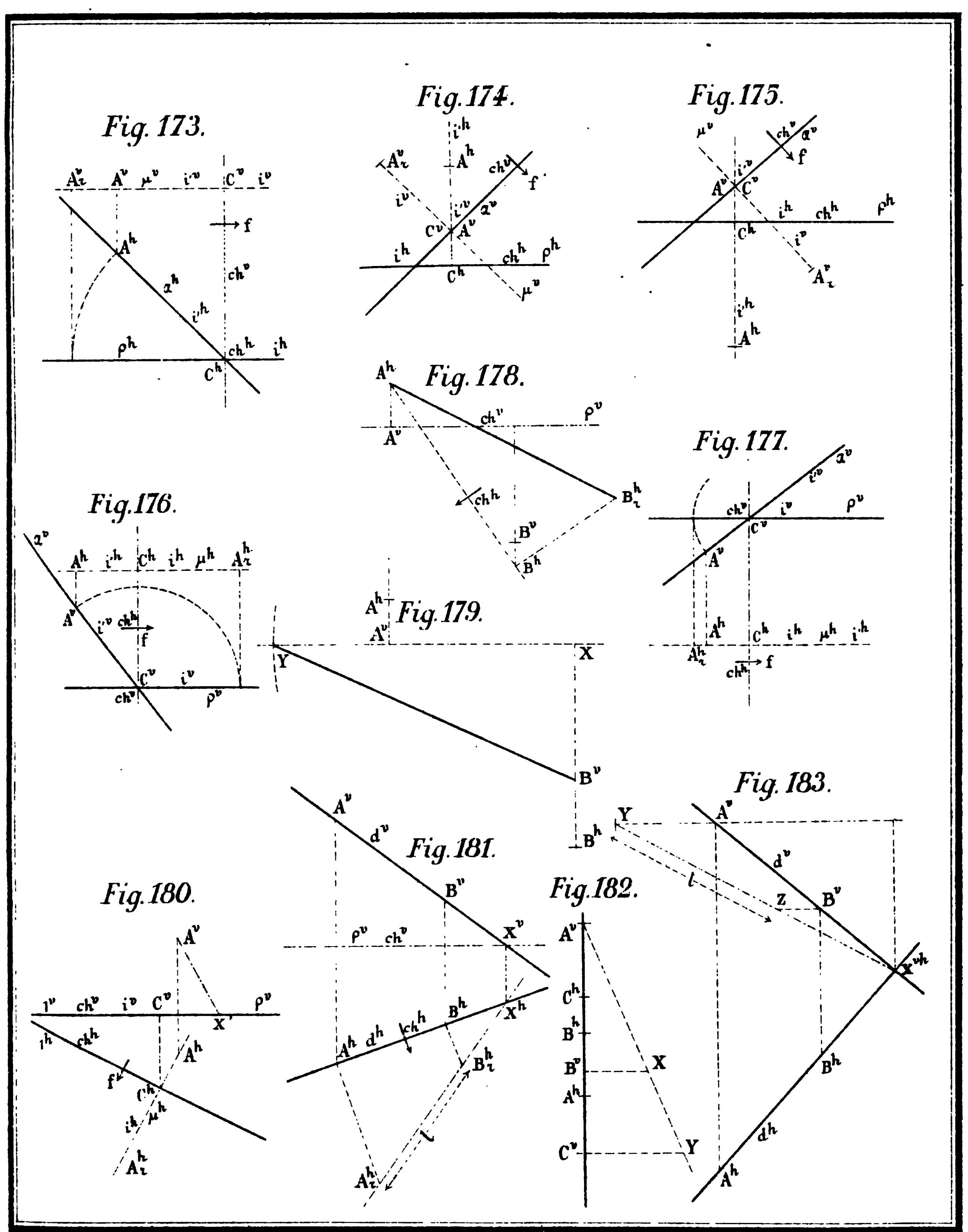
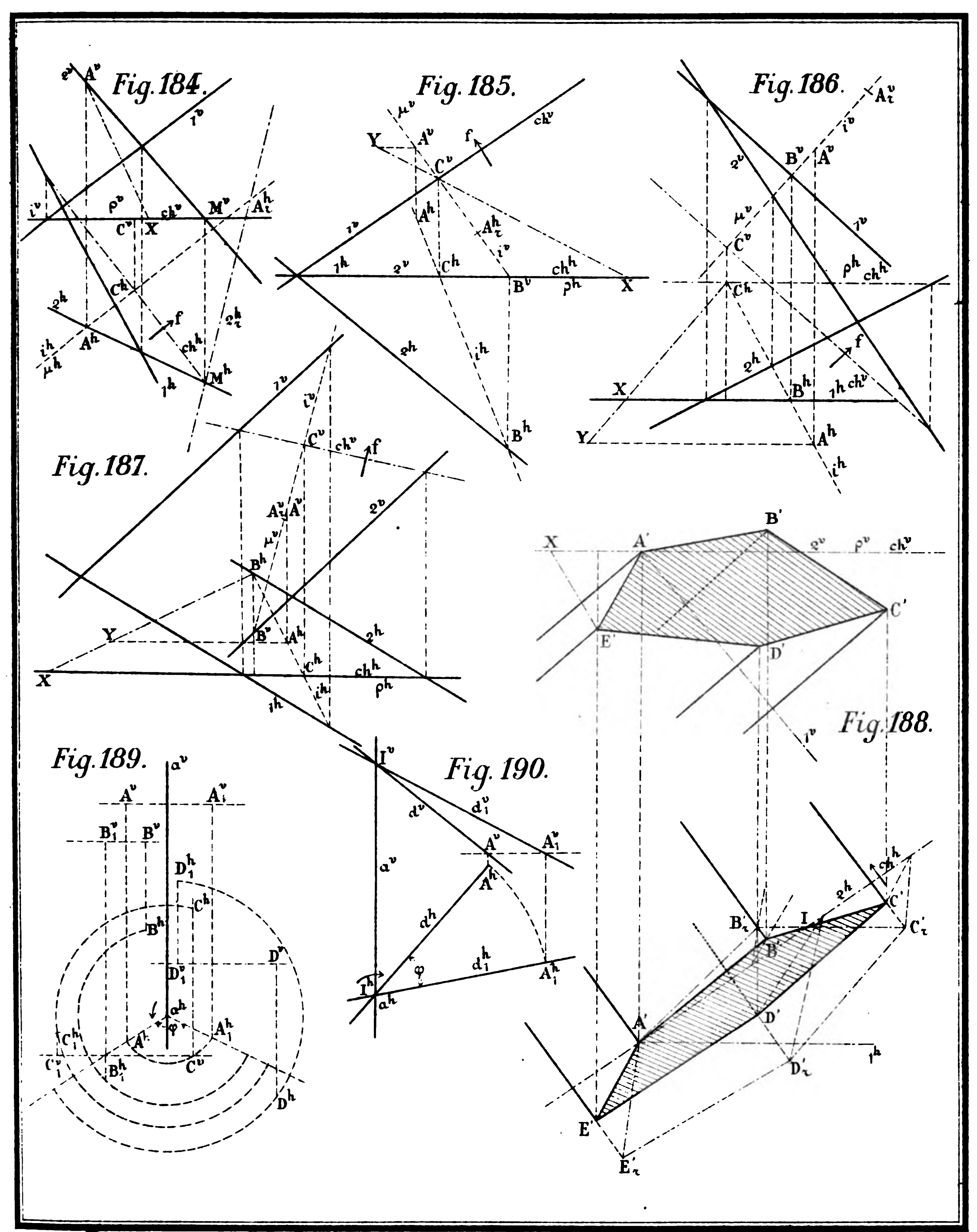
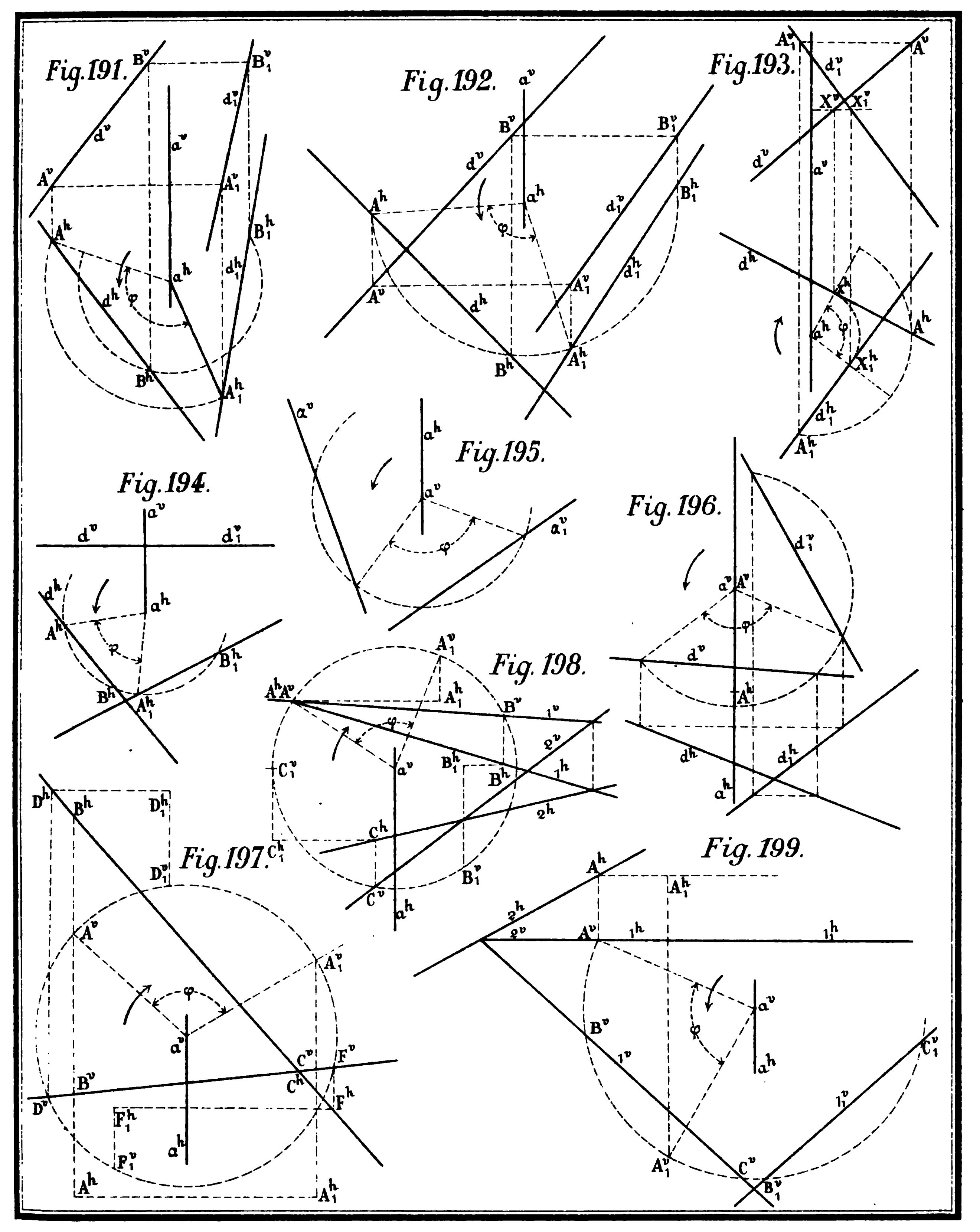
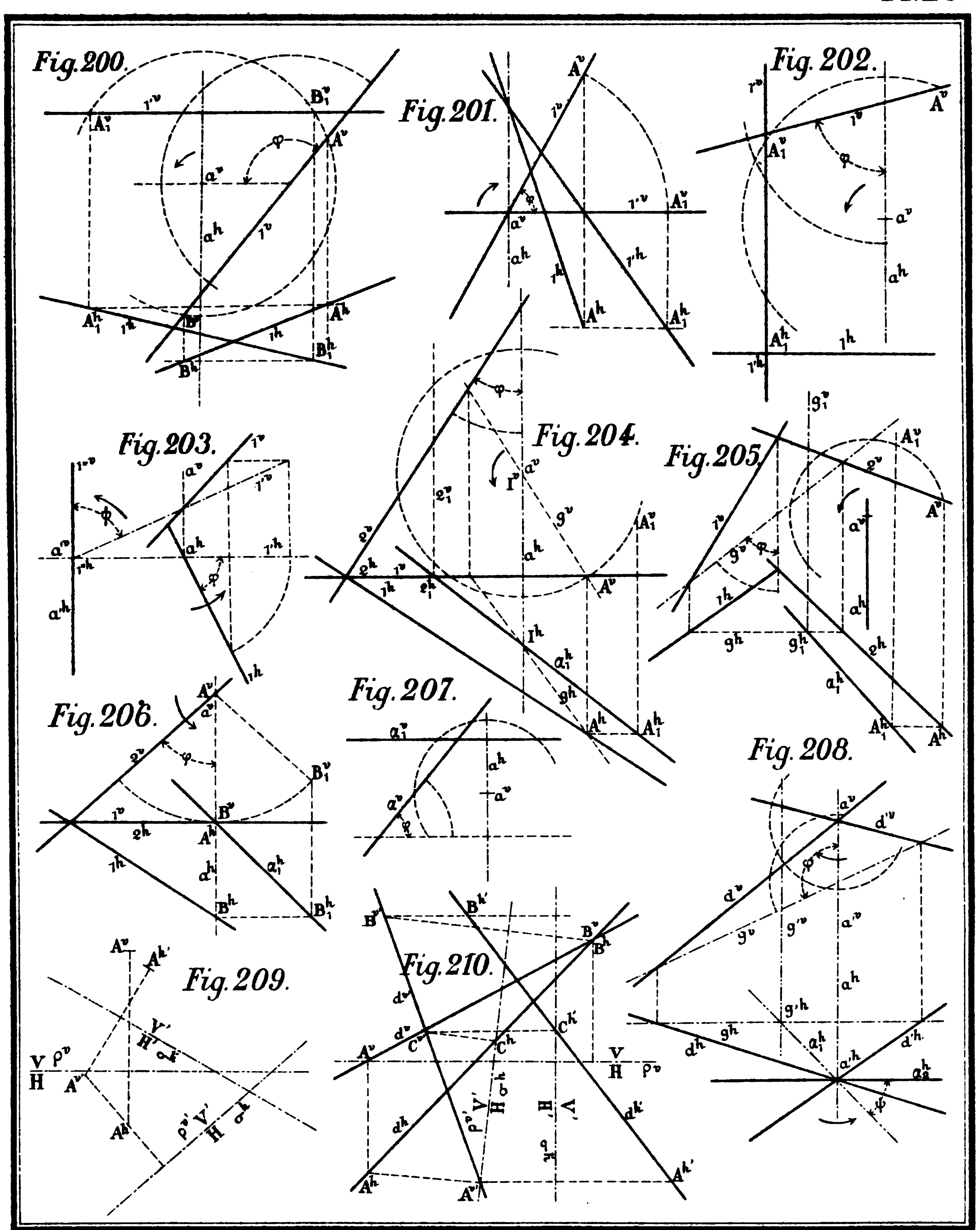


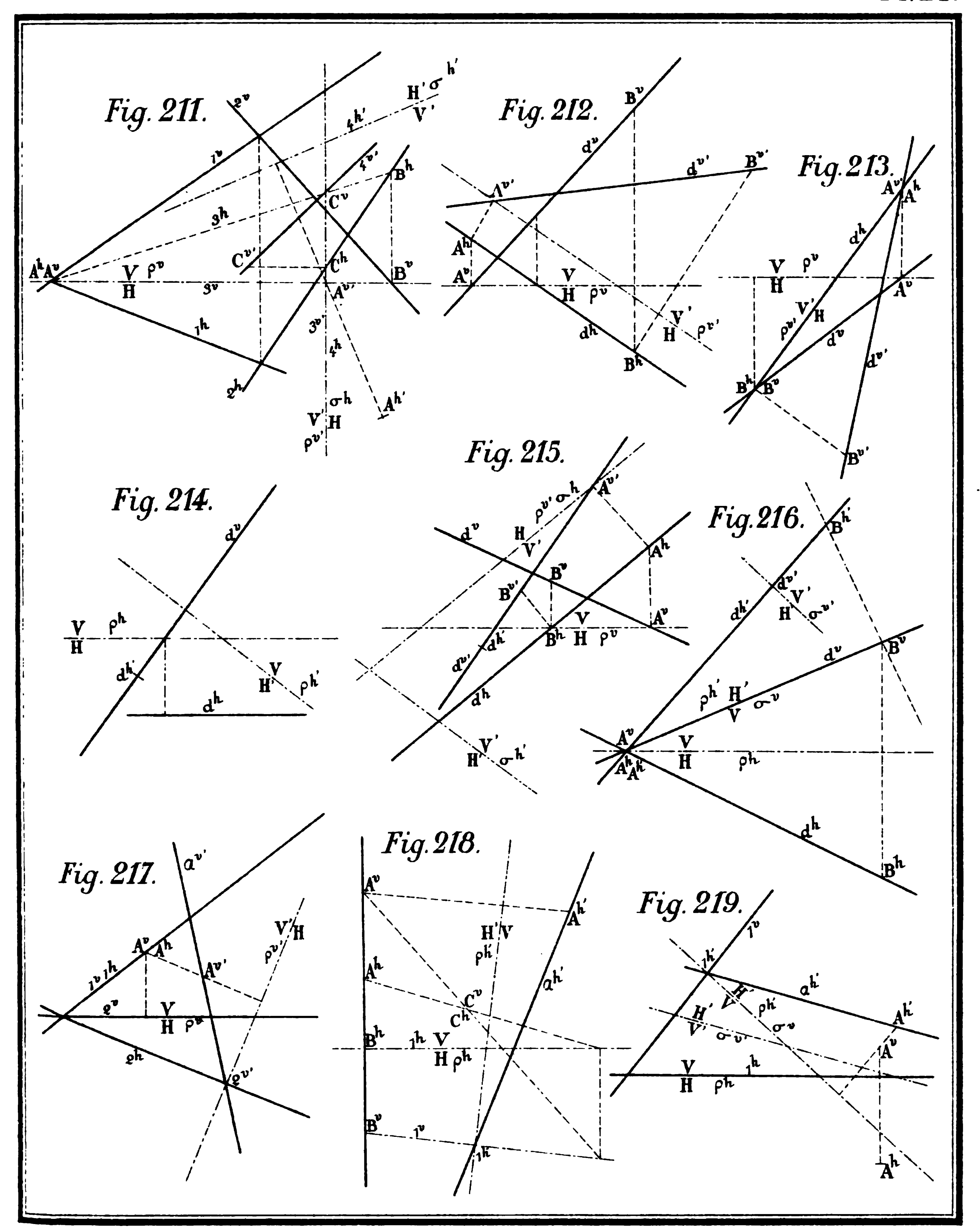
Fig. 164.
Fig. 165.
Fig. 166.
Fig. 167.
Fig. 168.
Fig. 169.
Fig. 170.
Fig. 171.
Fig. 172.

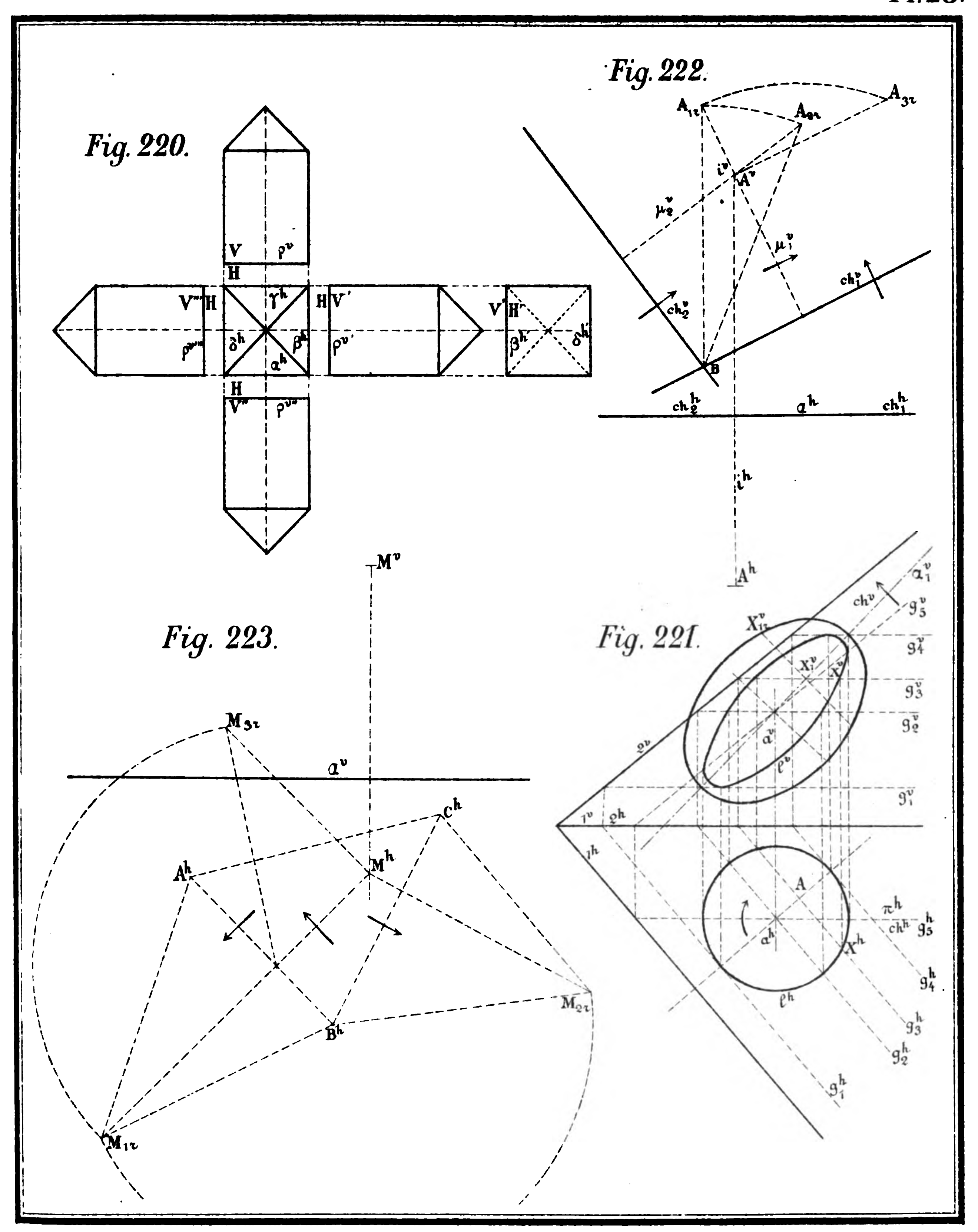

Fig. 173.
Fig. 174.
Fig. 175.
Fig. 176.
Fig. 177.
Fig. 178.
Fig. 179.
Fig. 180.
Fig. 181.
Fig. 182.
Fig. 183.

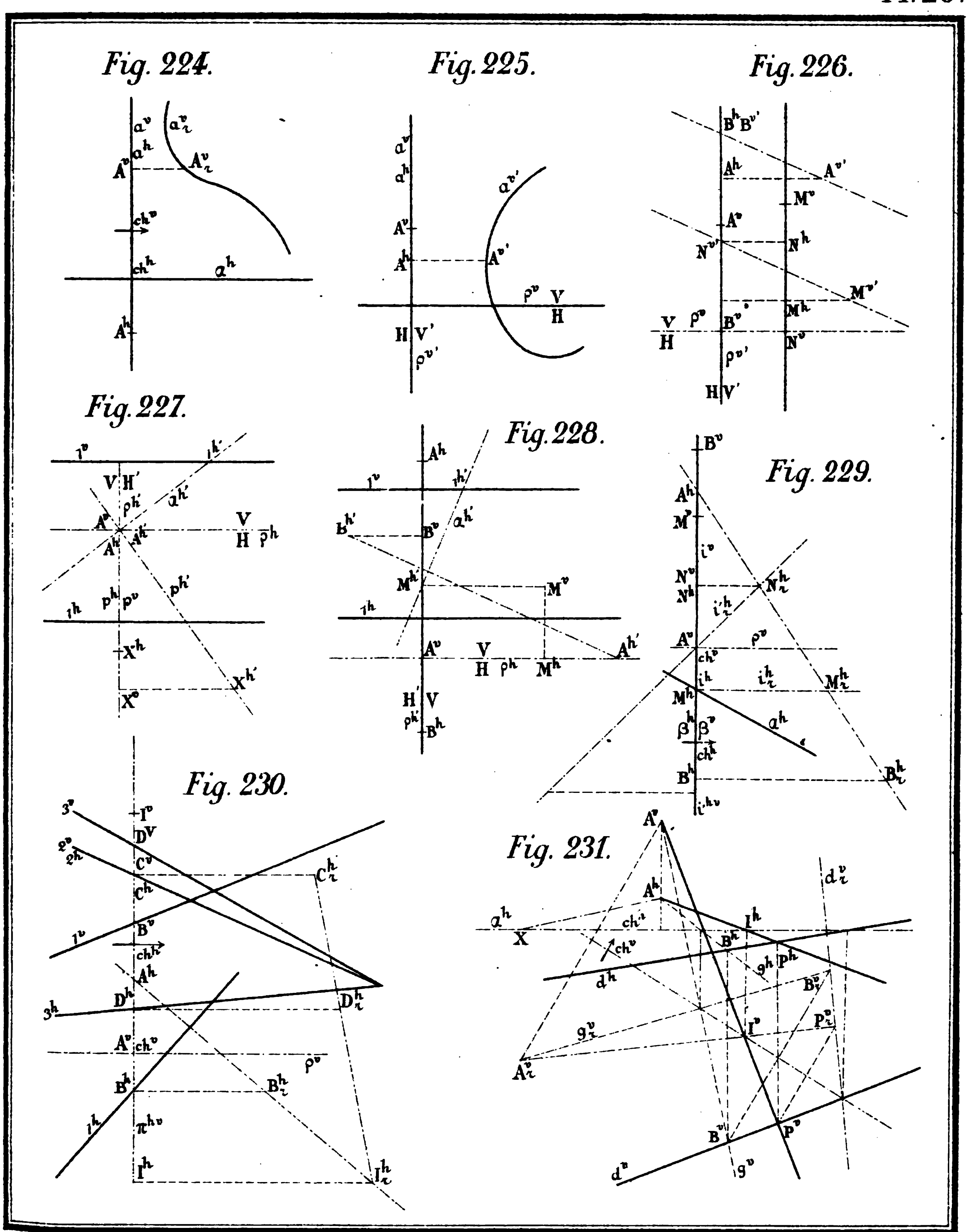

Fig. 184.
Fig. 185.
Fig. 186.
Fig. 187.
Fig. 188.
Fig. 189.
Fig. 190.

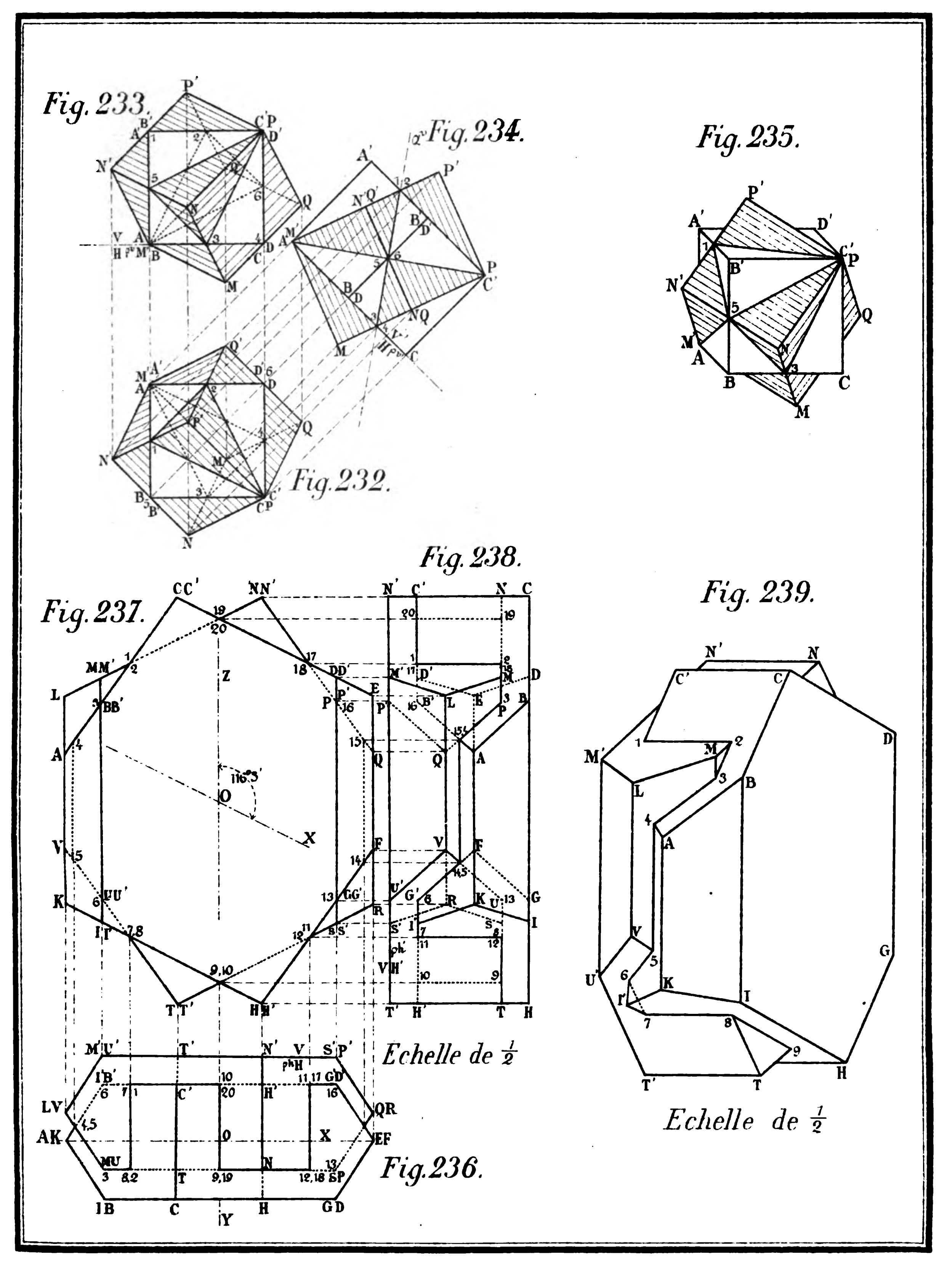

Fig. 191.
Fig. 192.
Fig. 193.
Fig. 194.
Fig. 195.
Fig. 196.
Fig. 197.
Fig. 198.
Fig. 199.

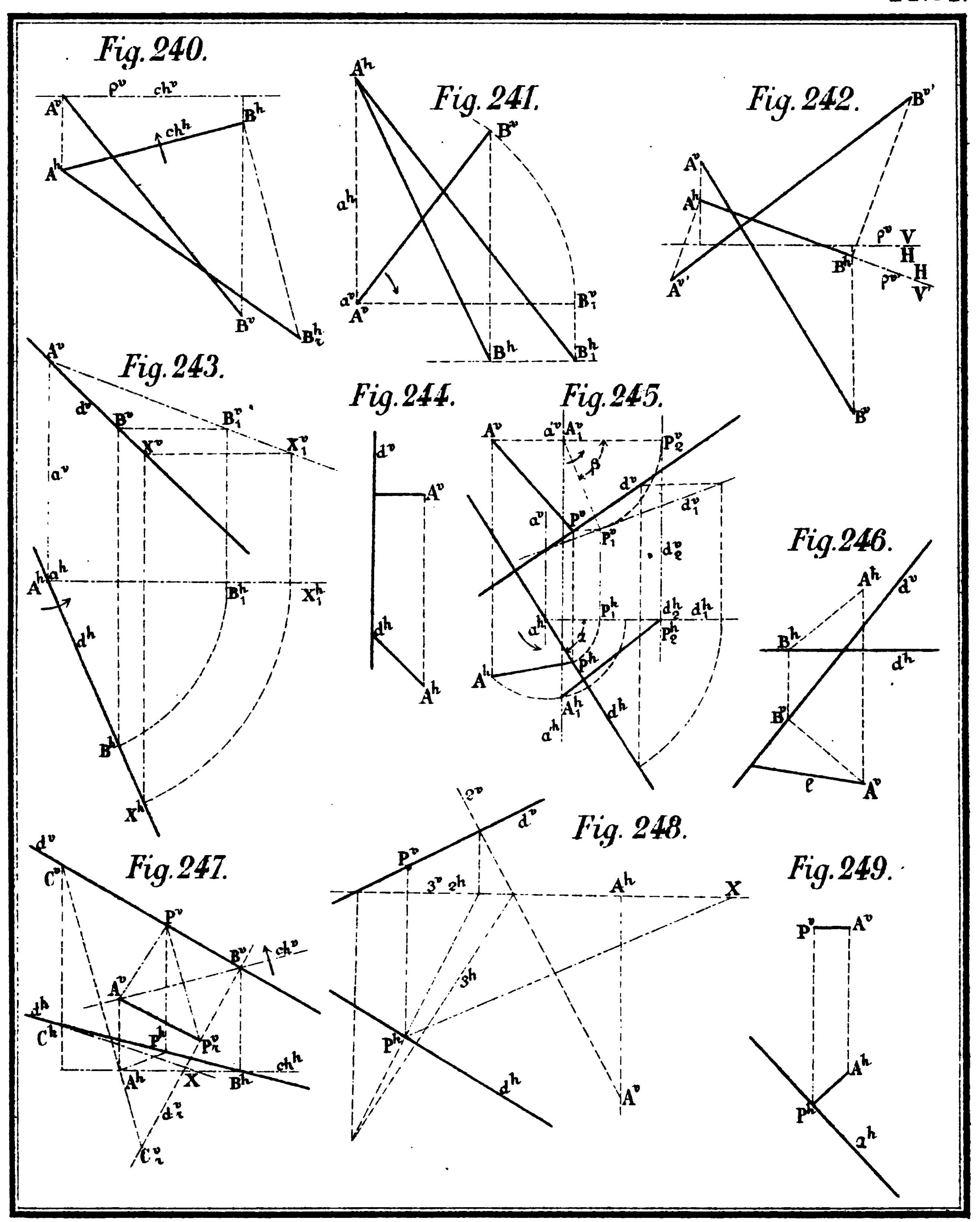

Fig. 200.
Fig. 201.
Fig. 202.
Fig. 203.
Fig. 204.
Fig. 205.
Fig. 206.
Fig. 207.
Fig. 208.
Fig. 209.
Fig. 210.

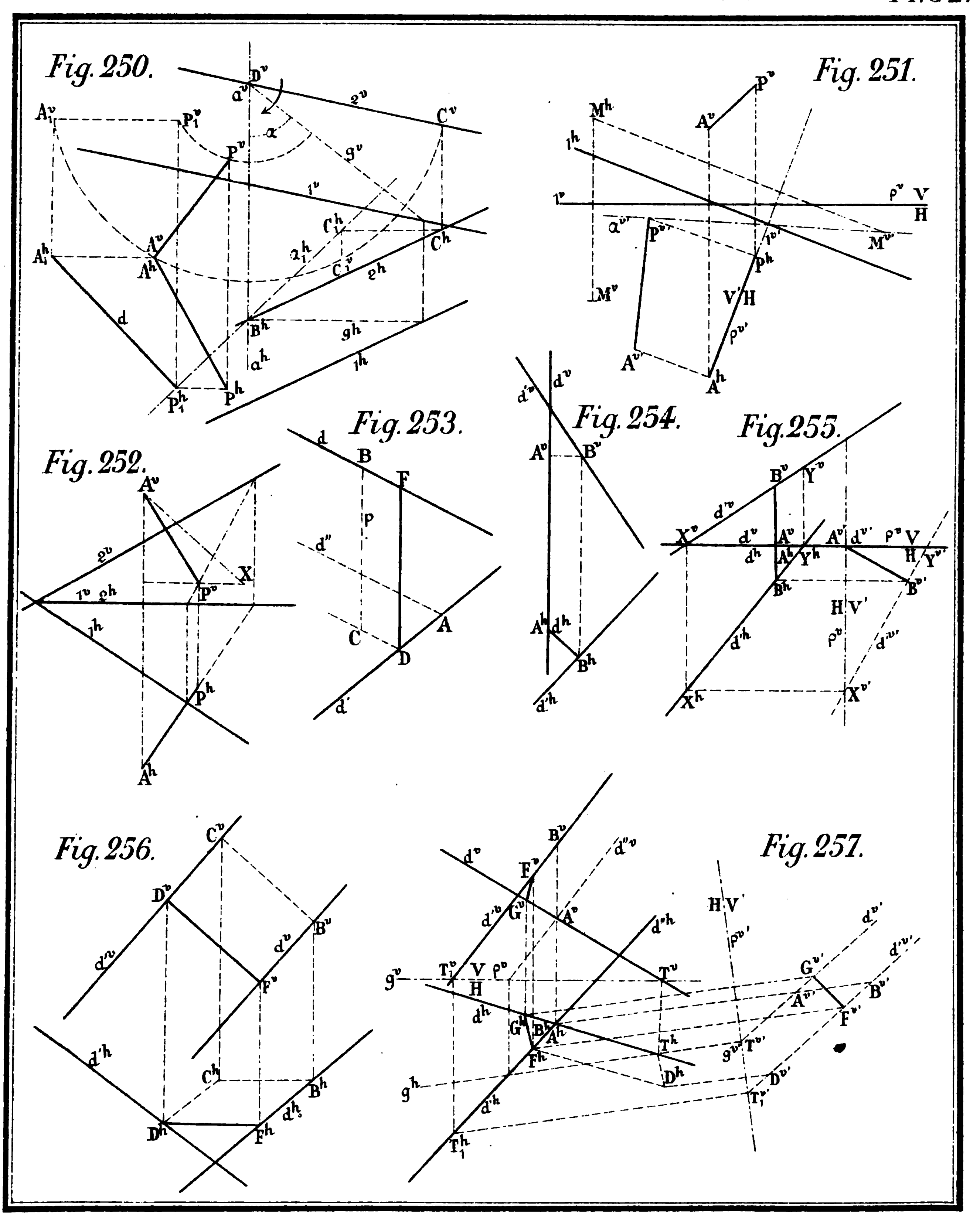

Fig. 211.
Fig. 212.
Fig. 213.
Fig. 214.
Fig. 215.
Fig. 216.
Fig. 217.
Fig. 218.
Fig. 219.

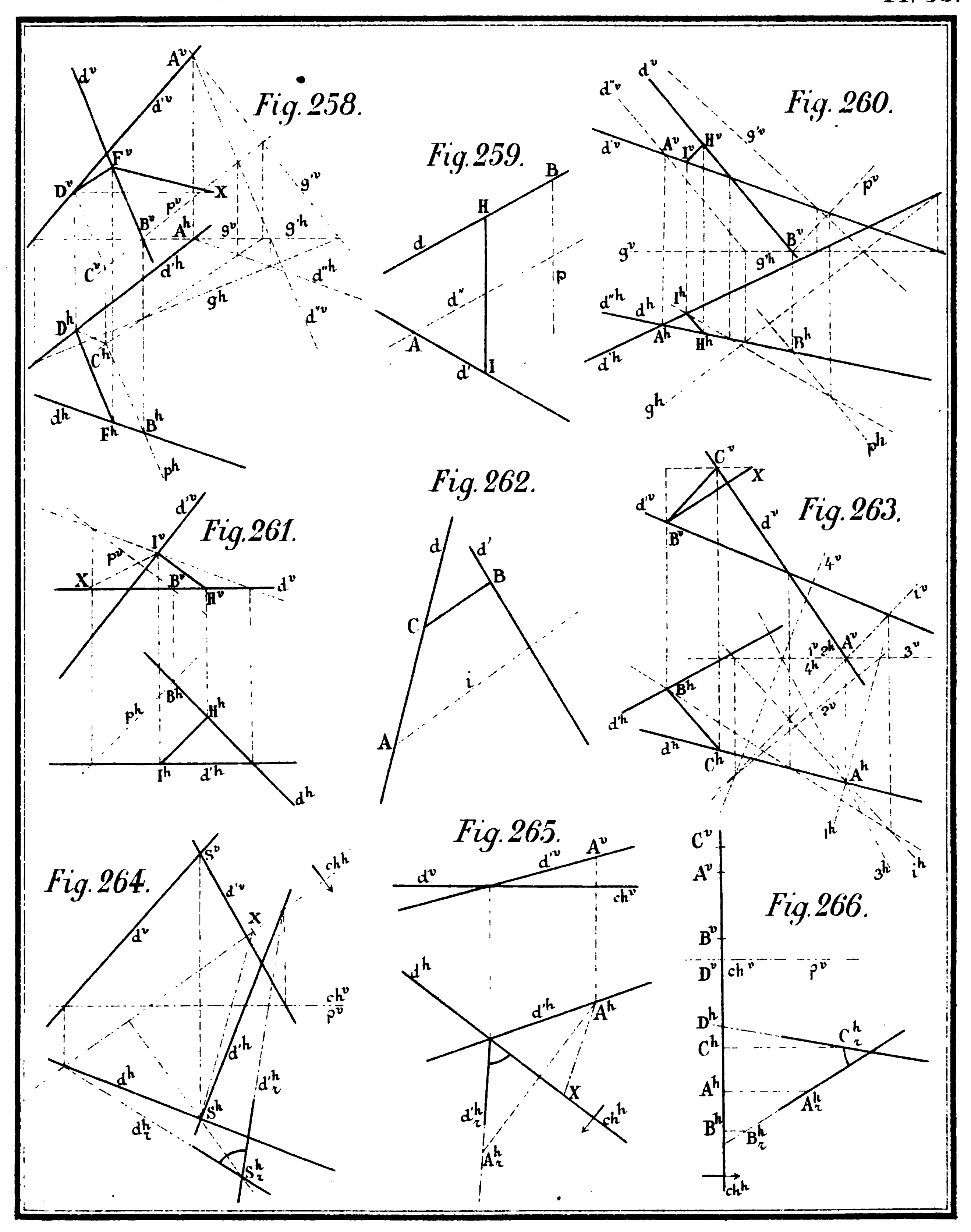

Fig. 220.
Fig. 222.
Fig. 223.
Fig. 221.
V
H
ch
M

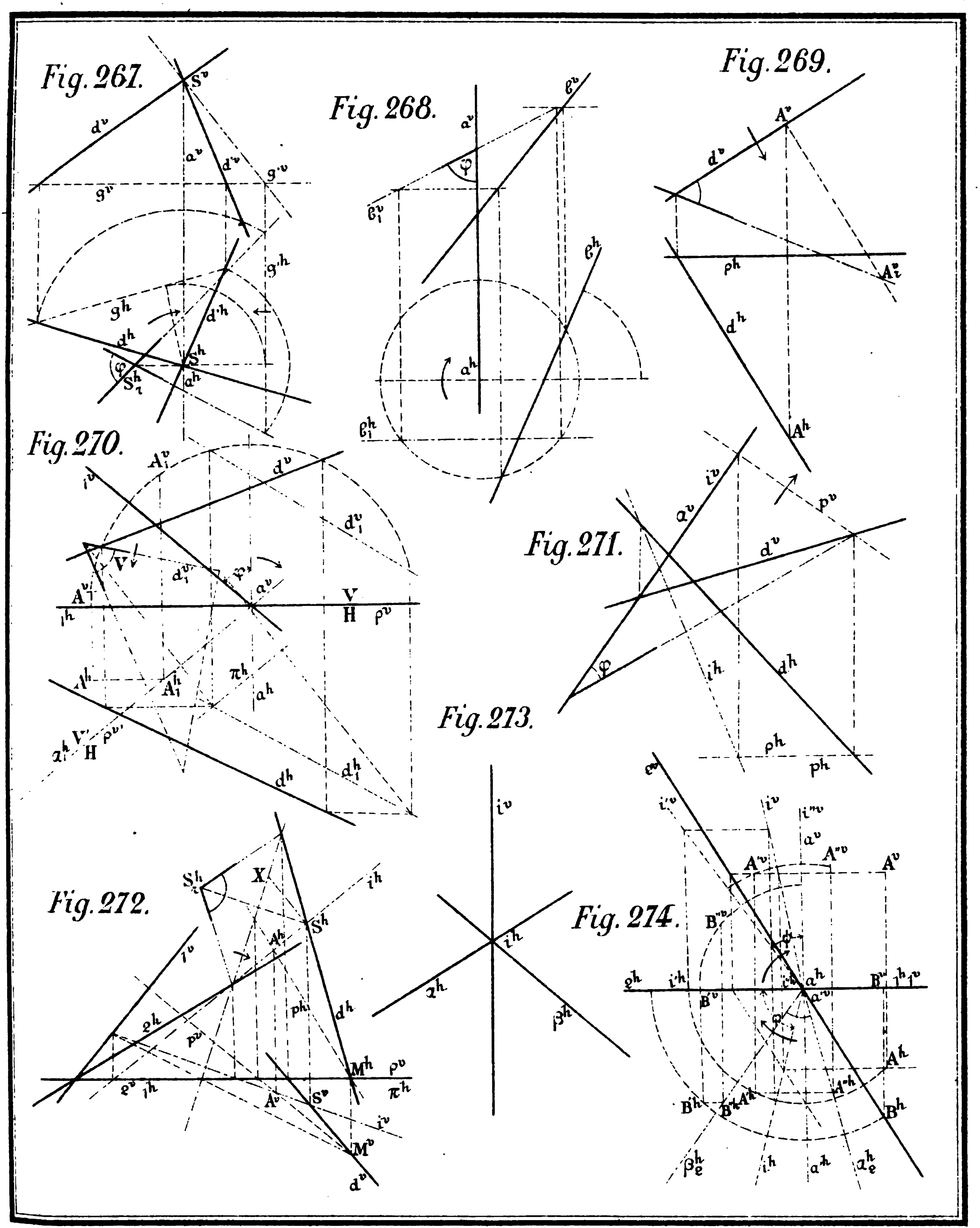

Fig. 224.
Fig. 225.
Fig. 226.
Fig. 227.
Fig. 228.
Fig. 229.
Fig. 230.
Fig. 231.

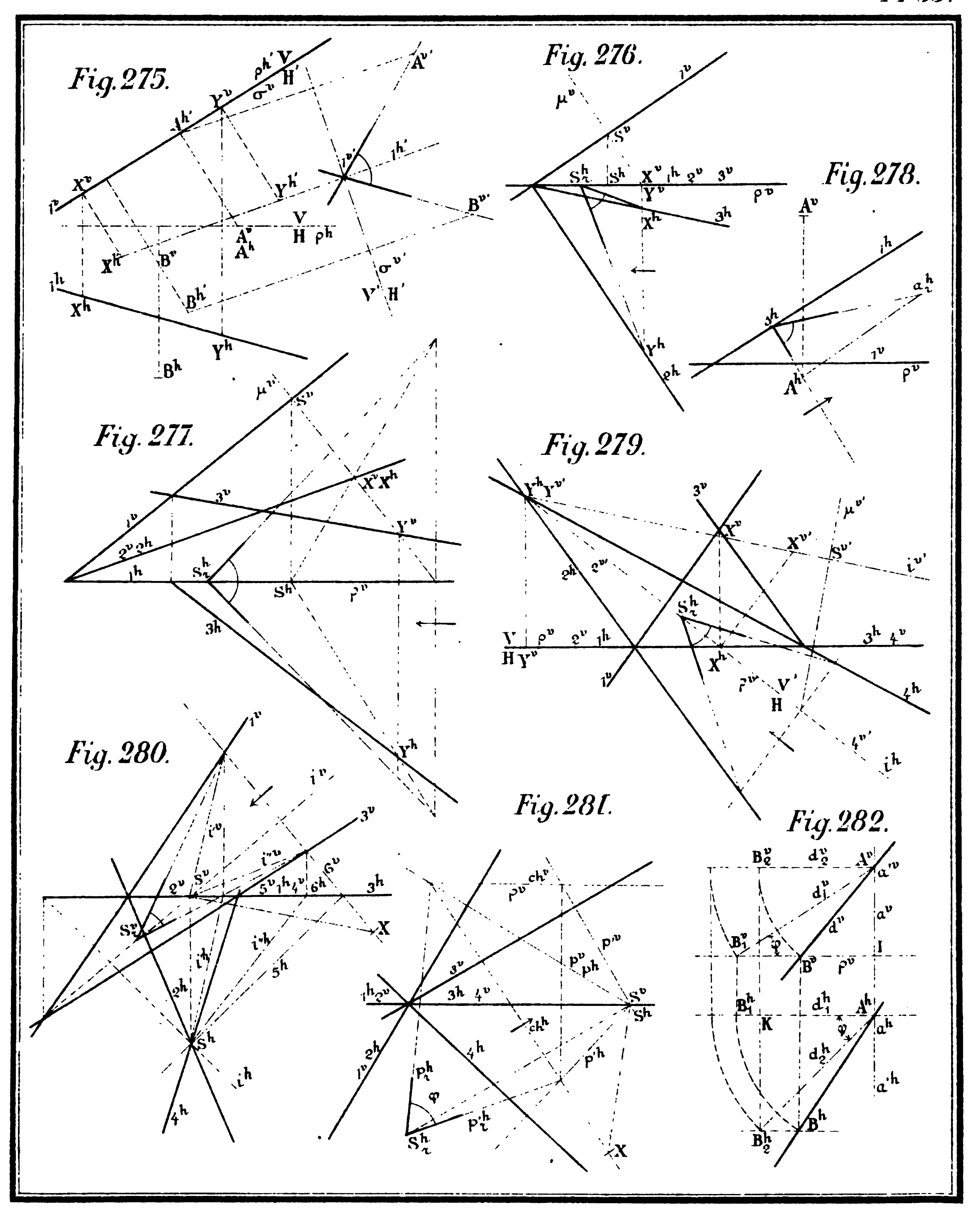

Fig. 233.
Fig. 234.
Fig. 235.
Fig. 232.
Fig. 237.
Fig. 238.
Fig. 239.
Echelle de 1/2
Fig. 236.
Echelle de 1/2

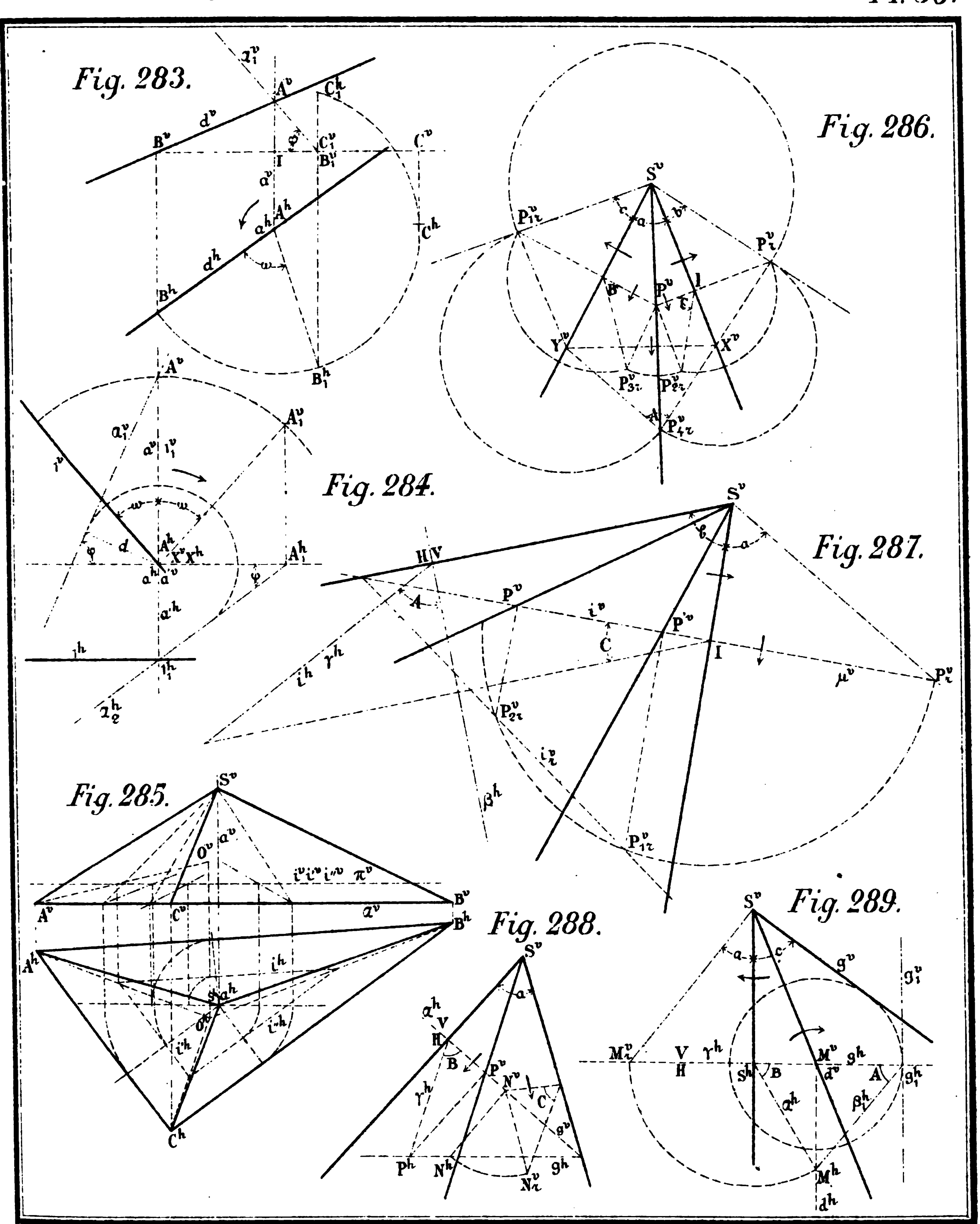

Fig. 240.
Fig. 241.
Fig. 242.
Fig. 243.
Fig. 244.
Fig. 245.
Fig. 246.
Fig. 247.
Fig. 248.
Fig. 249.

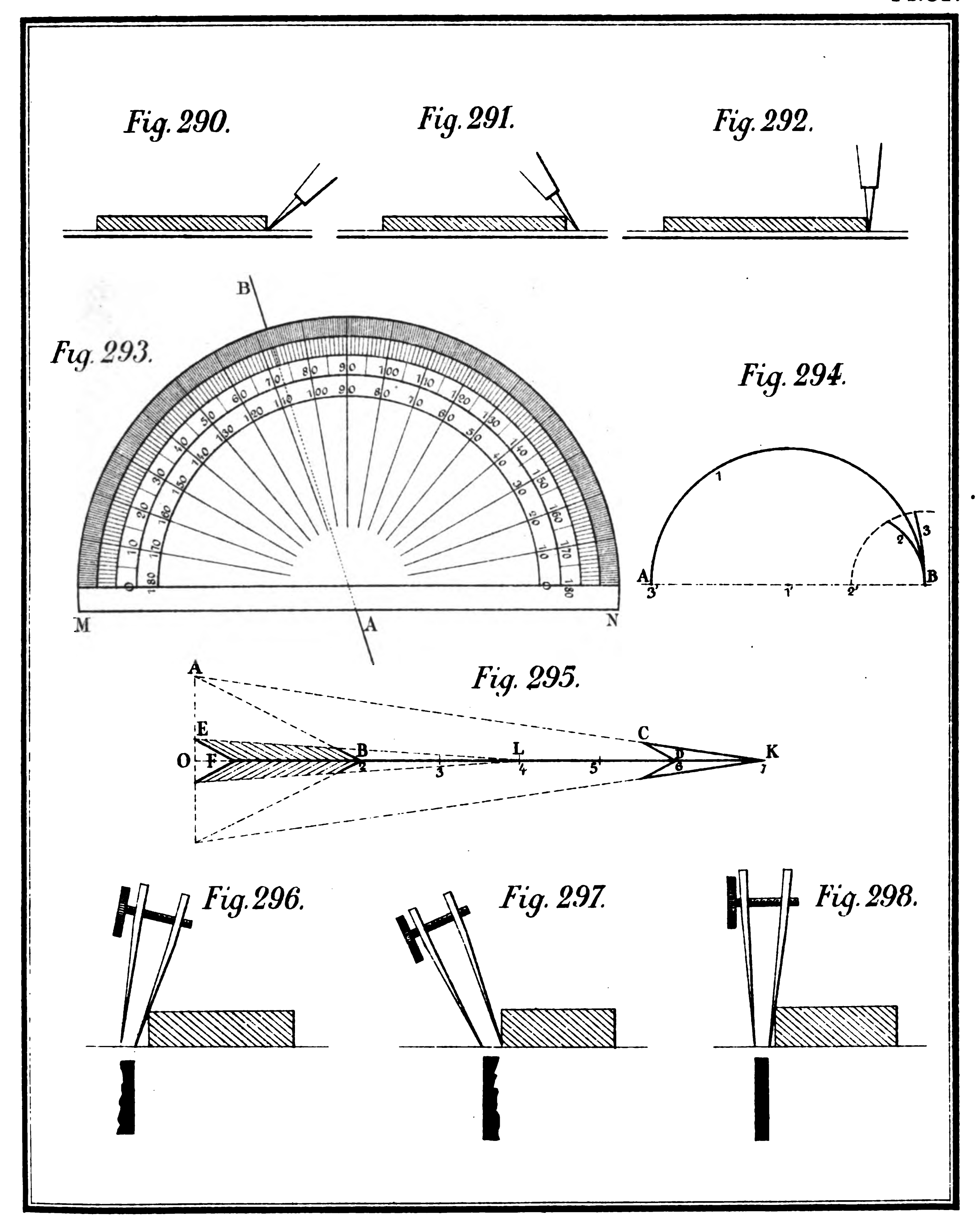

Fig. 250.
Fig. 251.
Fig. 252.
Fig. 253.
Fig. 254.
Fig. 255.
Fig. 256.
Fig. 257.

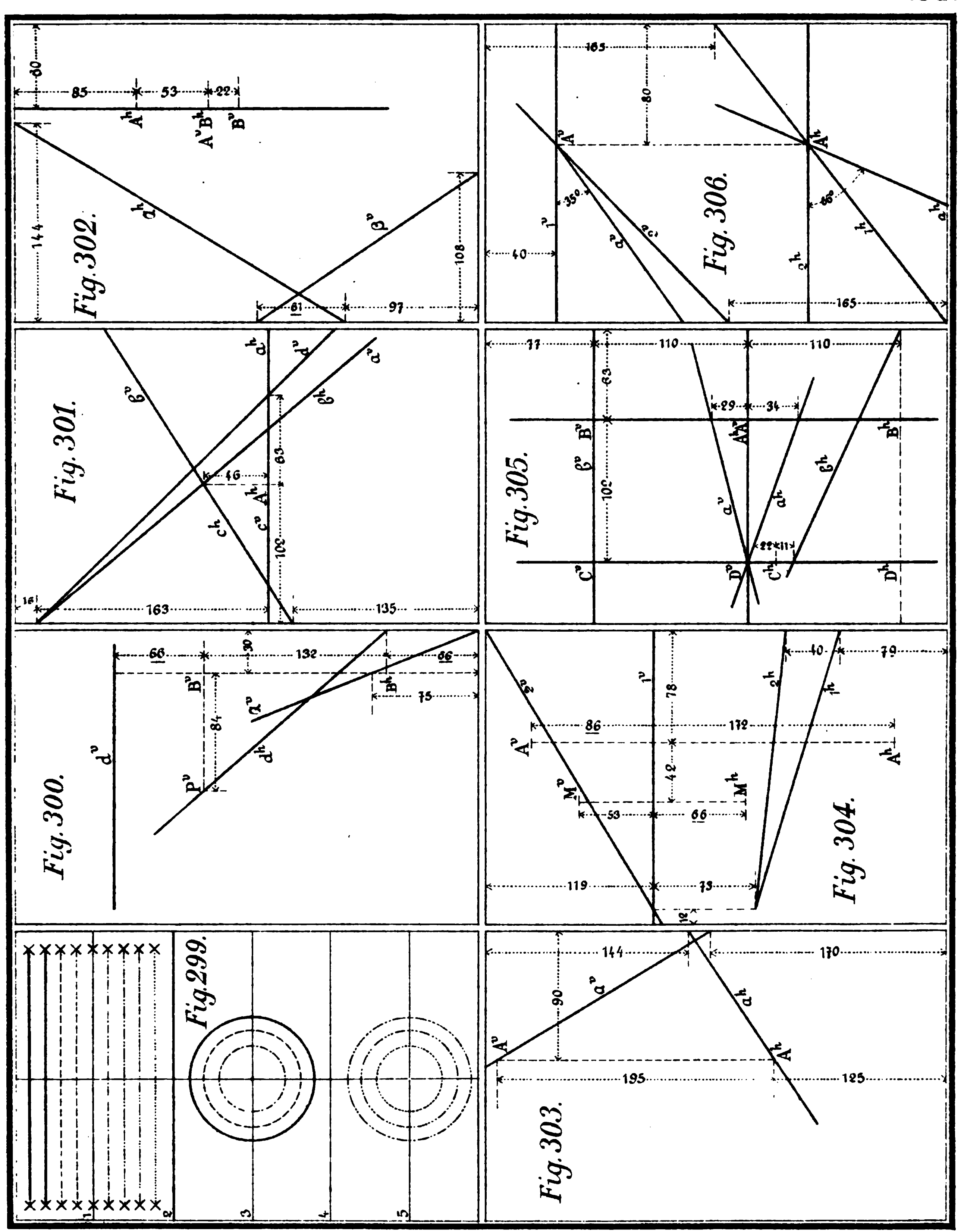

Fig. 258.
Fig. 259.
Fig. 260.
Fig. 261.
Fig. 262.
Fig. 263.
Fig. 264.
Fig. 265.
Fig. 266.

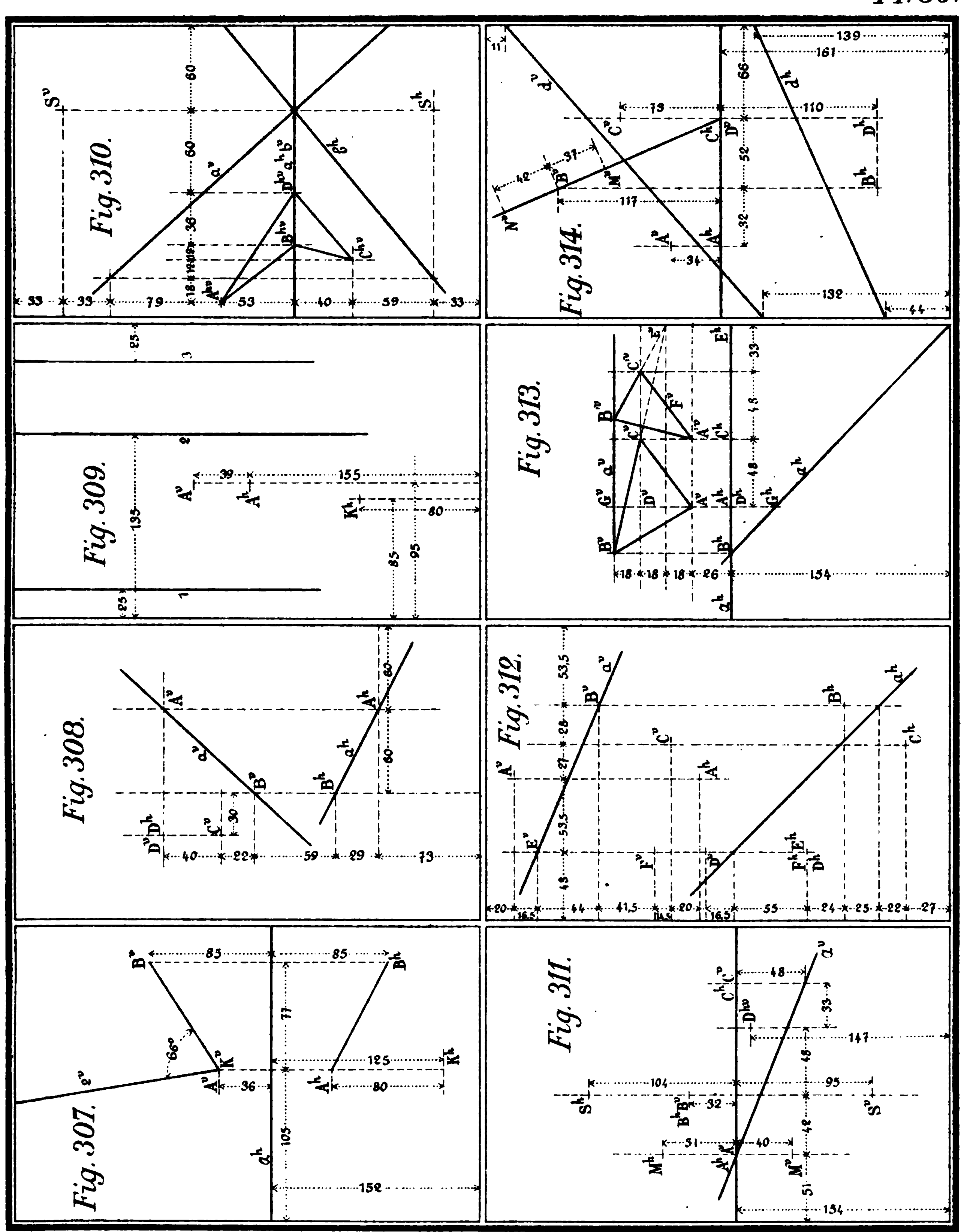

Fig. 267.
Fig. 268.
Fig. 269.
Fig. 270.
Fig. 271.
Fig. 272.
Fig. 273.
Fig. 274.

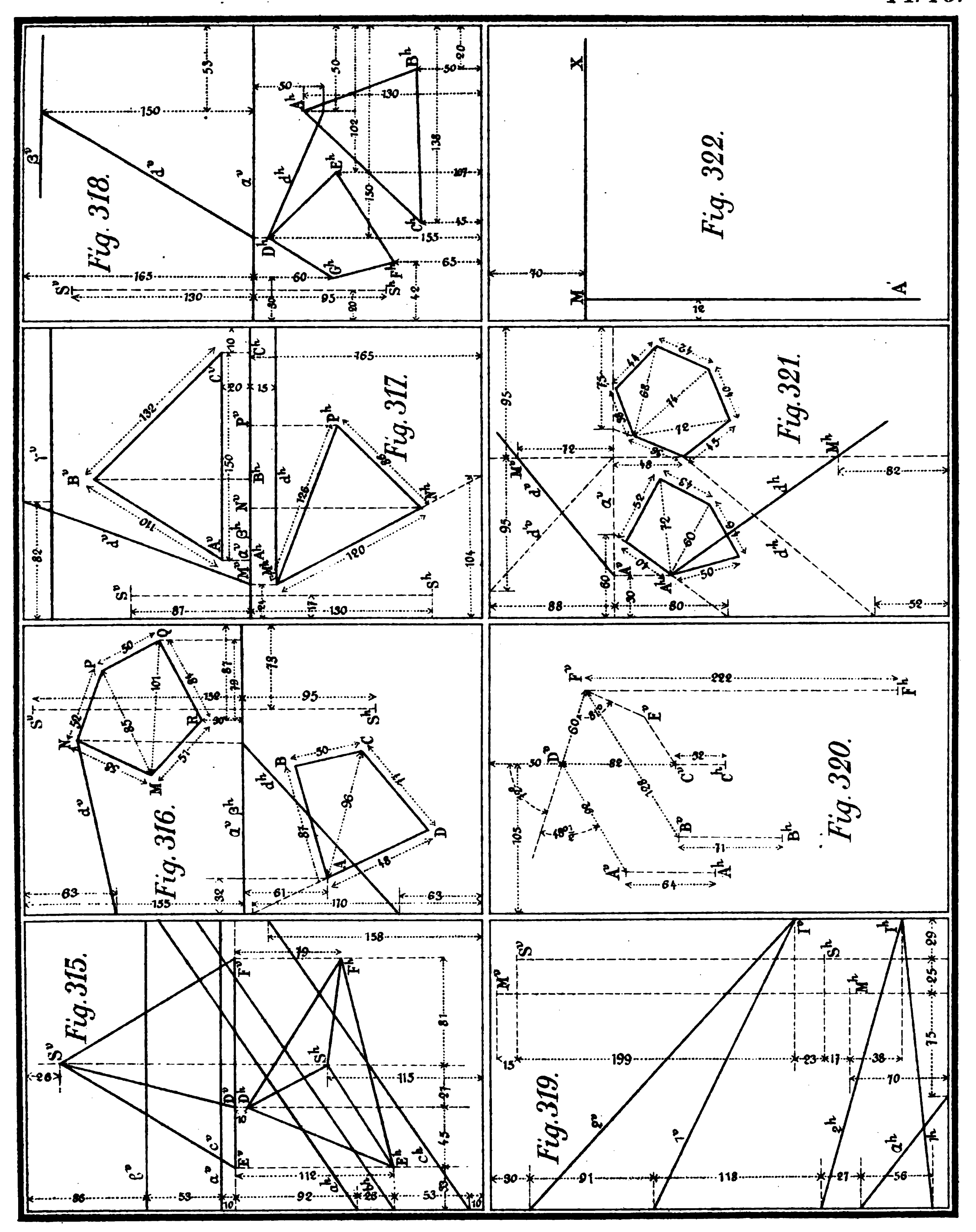

Fig. 275.
Fig. 276.
Fig. 277.
Fig. 278.
Fig. 279.
Fig. 280.
Fig. 281.
Fig. 282.


Fig. 283.
Fig. 284.
Fig. 285.
Fig. 286.
Fig. 287.
Fig. 288.
Fig. 289.


Fig. 290.
Fig. 291.
Fig. 292.
Fig. 293.
B
A
M
N
Fig. 294.
A
B
1
2
3
Fig. 295.
A
E
O
F
B
L
C
K
Fig. 296.
Fig. 297.
Fig. 298.


Fig. 302.
Fig. 301.
Fig. 300.
Fig. 299.
Fig. 306.
Fig. 305.
Fig. 304.
Fig. 303.


Fig. 310.
Fig. 309.
Fig. 308.
Fig. 307.
Fig. 314.
Fig. 313.
Fig. 312.
Fig. 311.


Fig. 315.
Fig. 316.
Fig. 317.
Fig. 318.
Fig. 319.
Fig. 320.
Fig. 321.
Fig. 322.

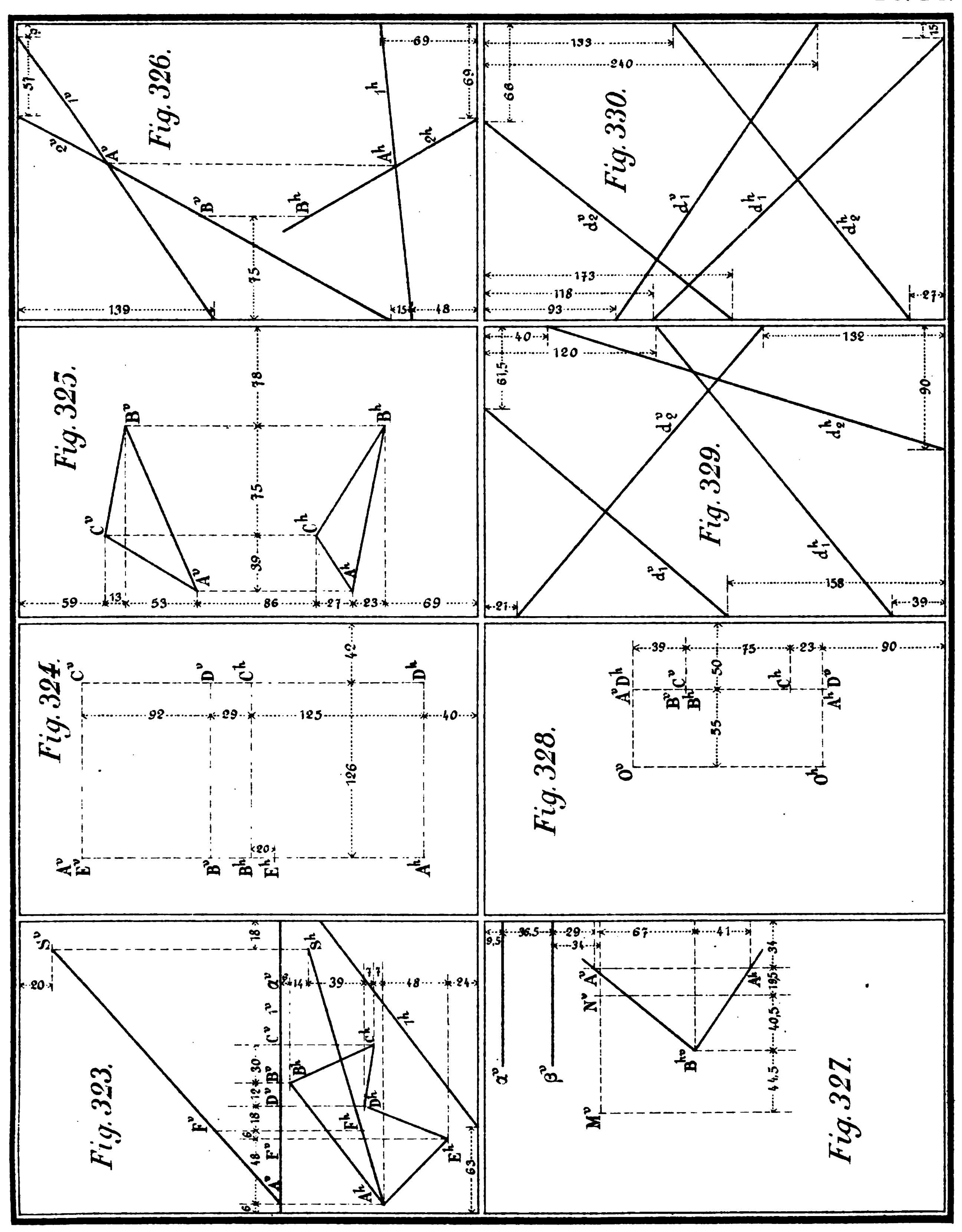
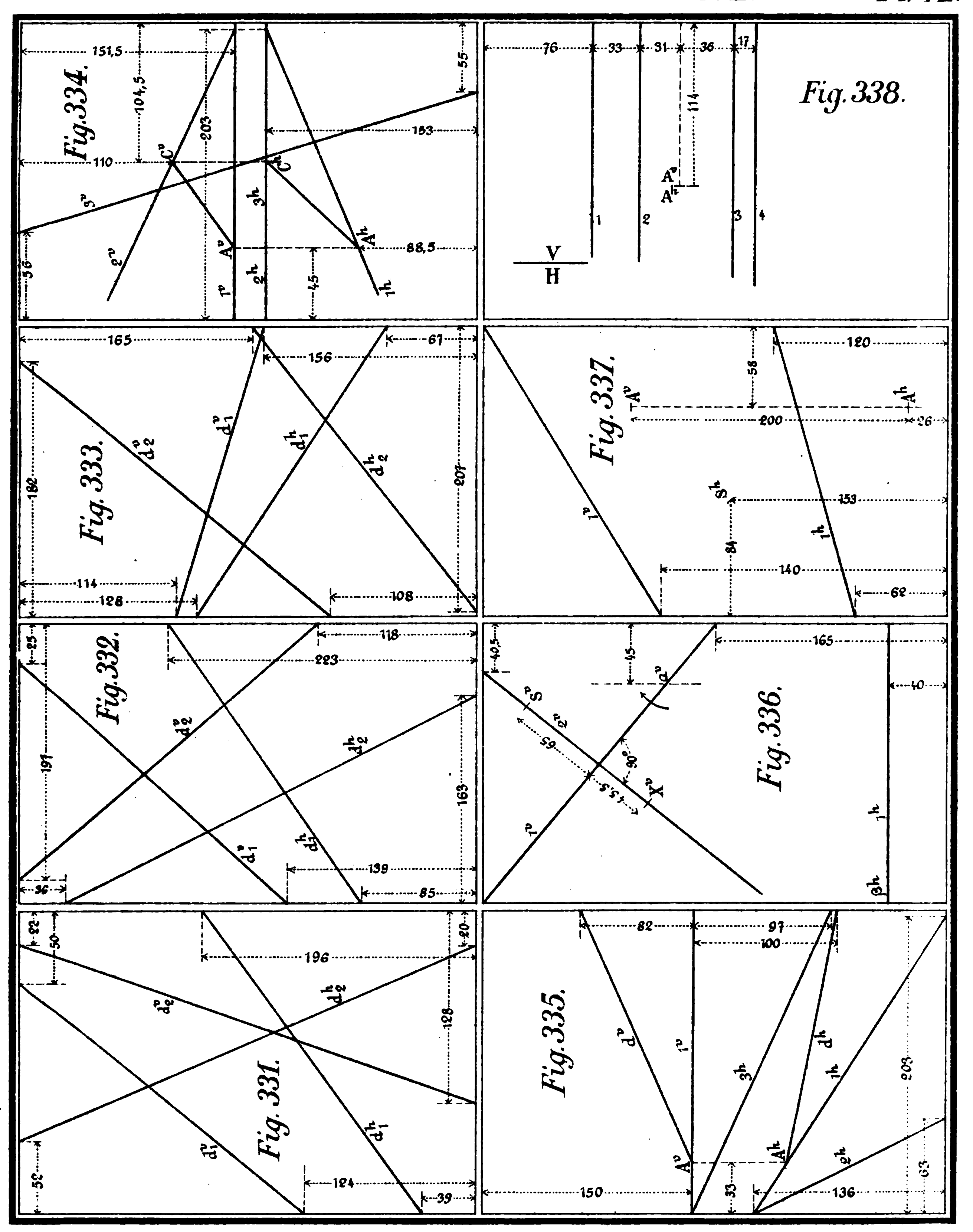
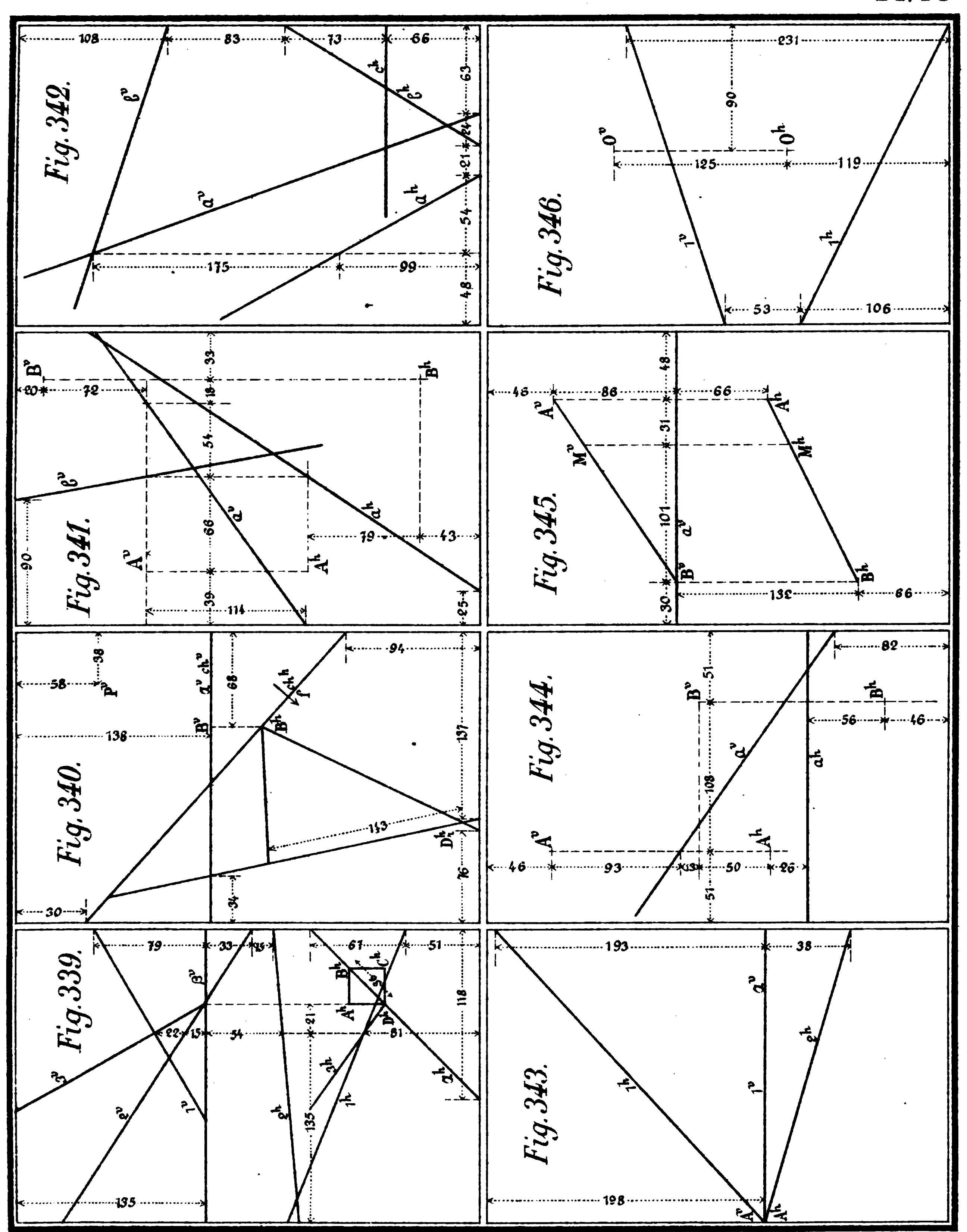
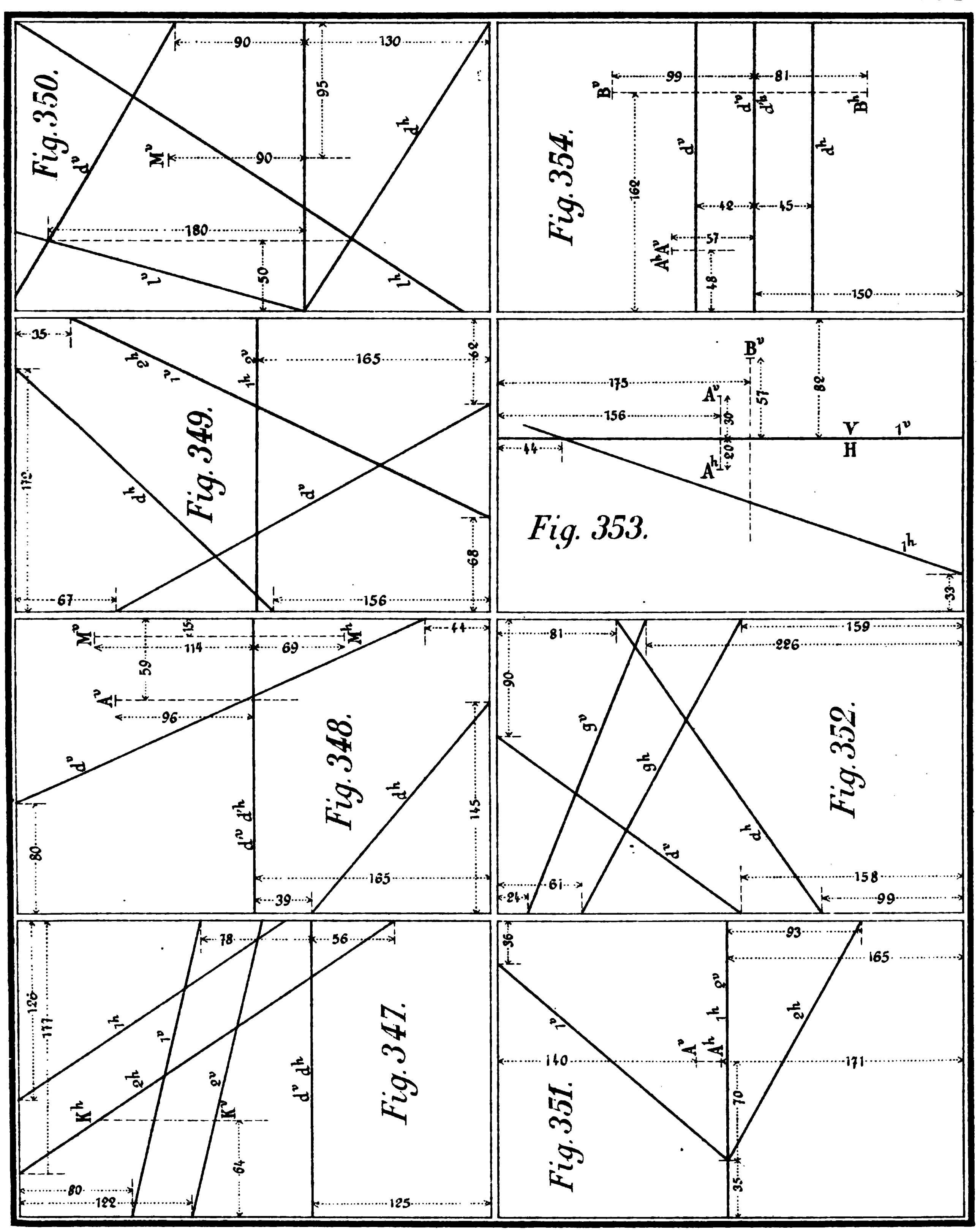
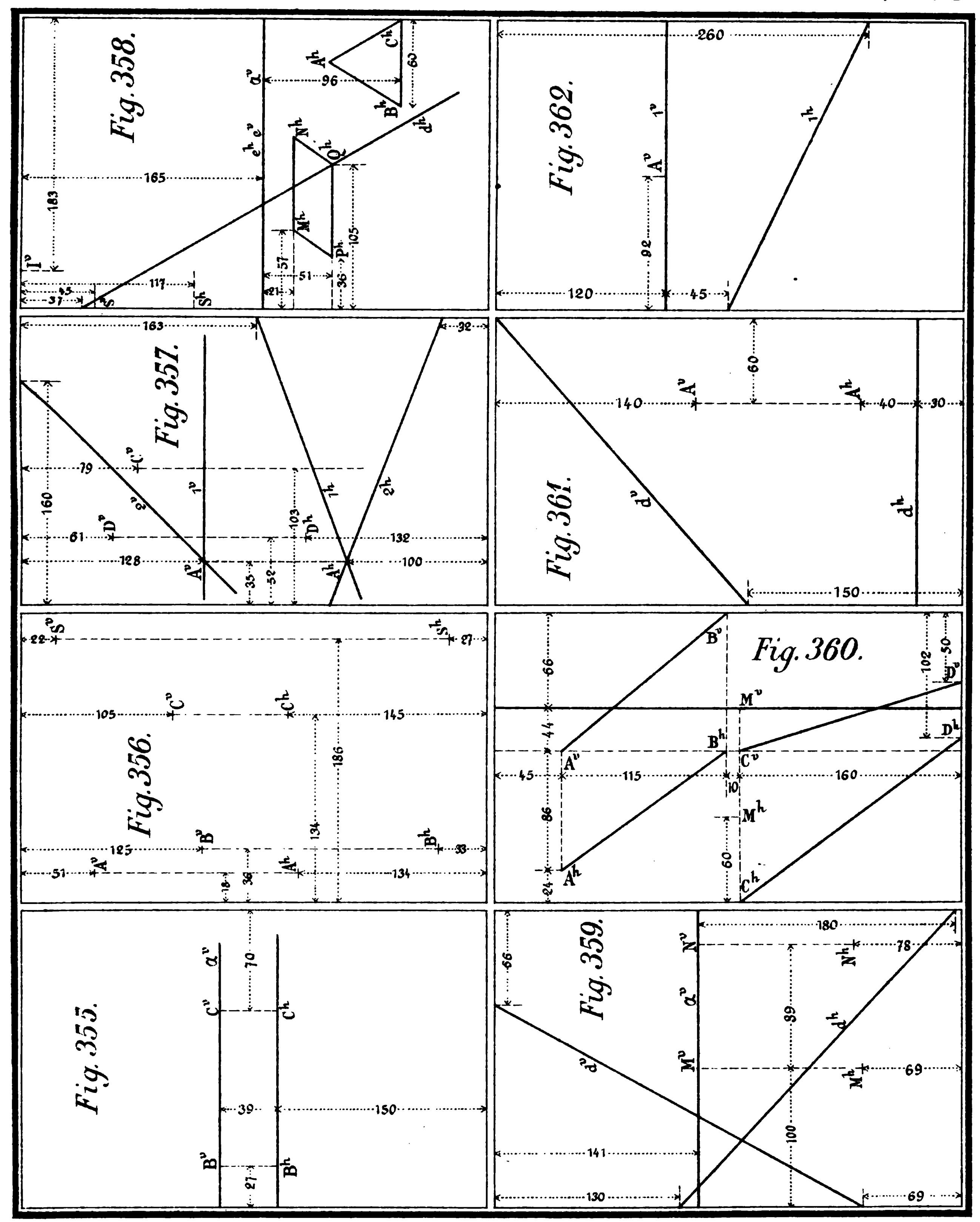


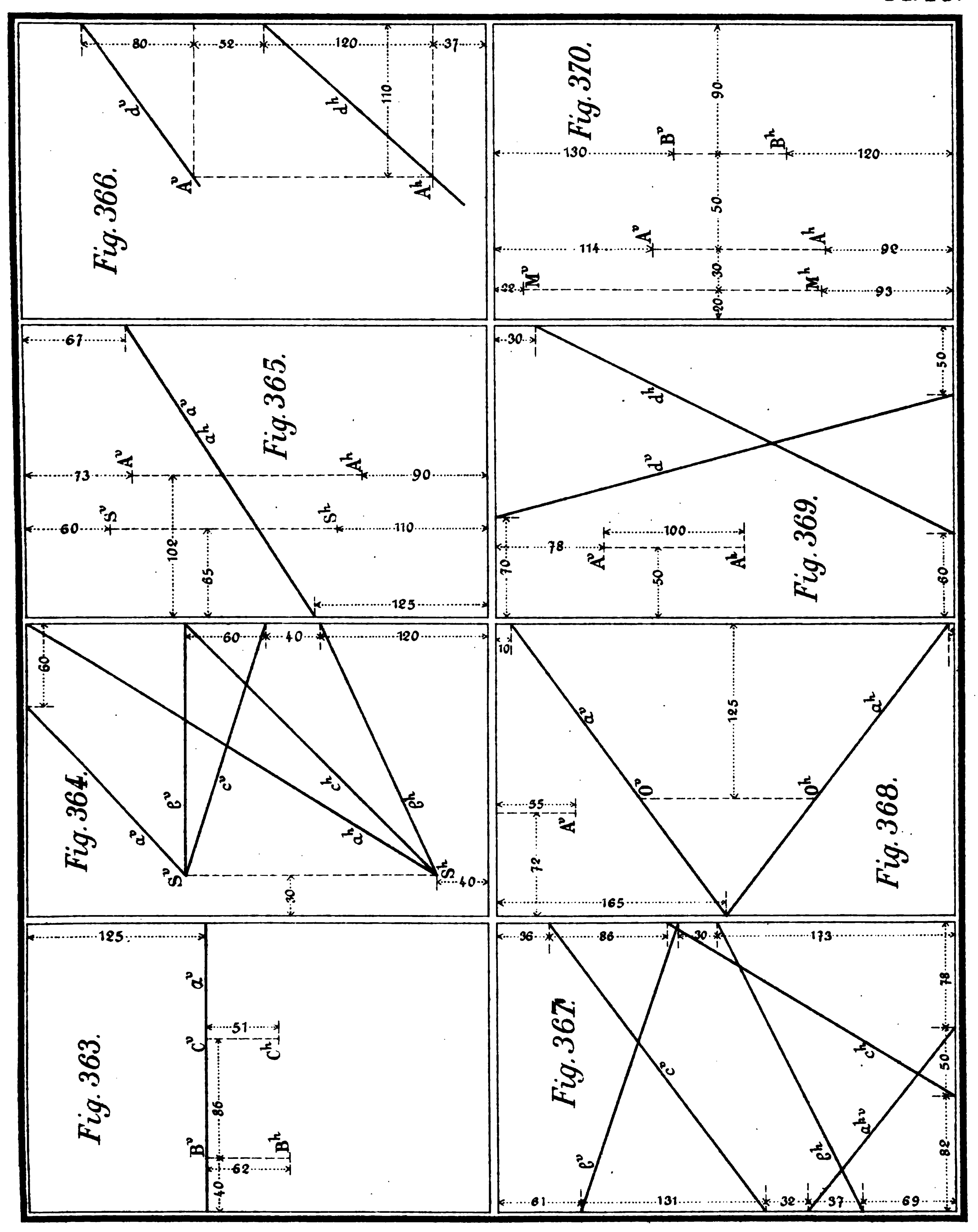
Fig. 326.
Fig. 330.
Fig. 325.
Fig. 329.
Fig. 324.
Fig. 328.
Fig. 323.
Fig. 327.


Fig. 334.
Fig. 338.
Fig. 333.
Fig. 337.
Fig. 332.
Fig. 336.
Fig. 331.
Fig. 335.


Fig. 342.
Fig. 346.
Fig. 341.
Fig. 345.
Fig. 340.
Fig. 344.
Fig. 339.
Fig. 343.


Fig. 350.
Fig. 354.
Fig. 349.
Fig. 353.
Fig. 348.
Fig. 352.
Fig. 347.
Fig. 351.


Fig. 358.
Fig. 362.
Fig. 357.
Fig. 361.
Fig. 356.
Fig. 360.
Fig. 355.
Fig. 359.


Fig. 363.
Fig. 364.
Fig. 365.
Fig. 366.
Fig. 367.
Fig. 368.
Fig. 369.
Fig. 370.

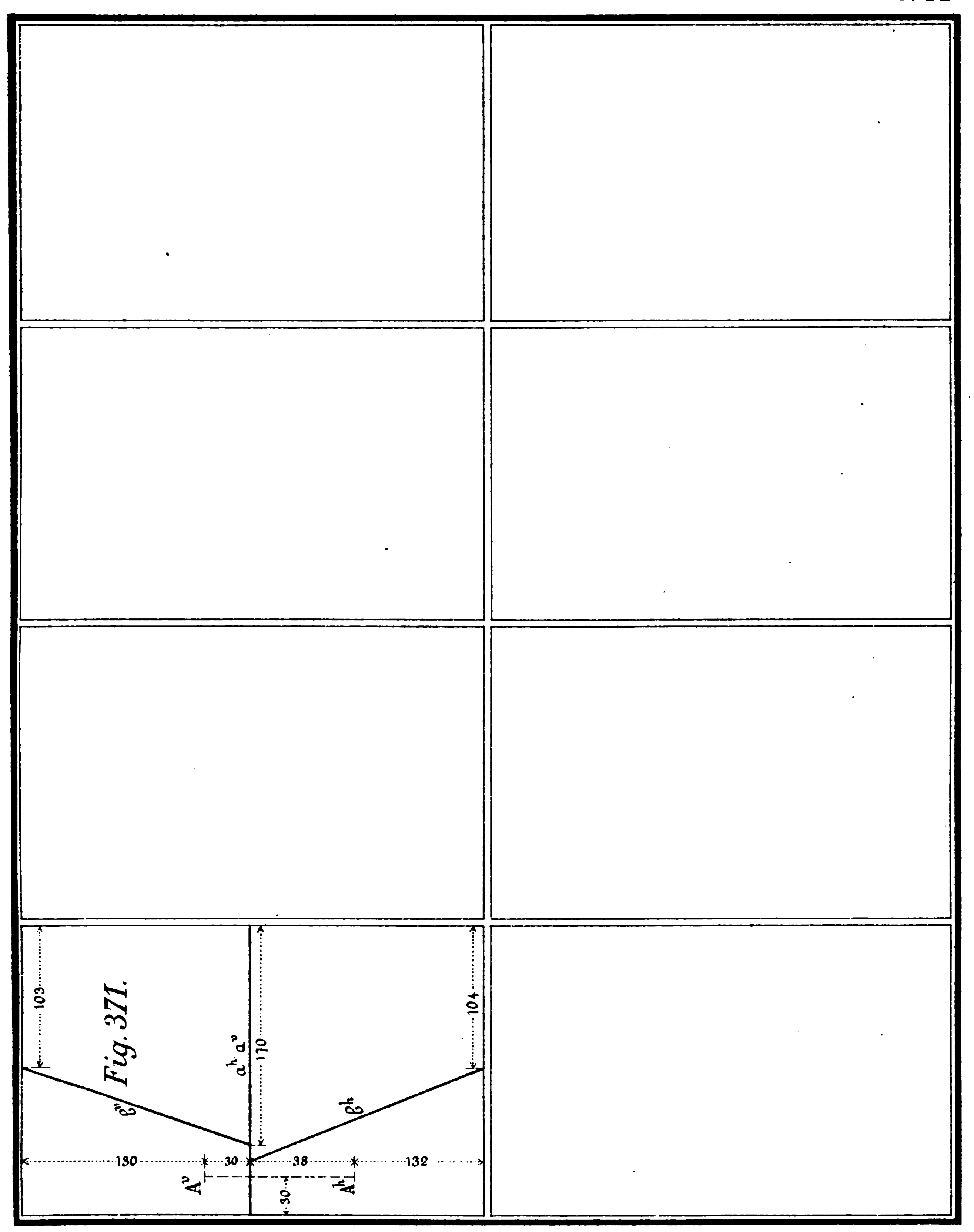

Fig. 371.
103
104
170
$a^h a^v$
ε^v
β^h
130
30
38
132
A^v
A^h
30

TABLE DES FIGURES.

ERRATA.

(Nous n'indiquons que les corrections essentielles).

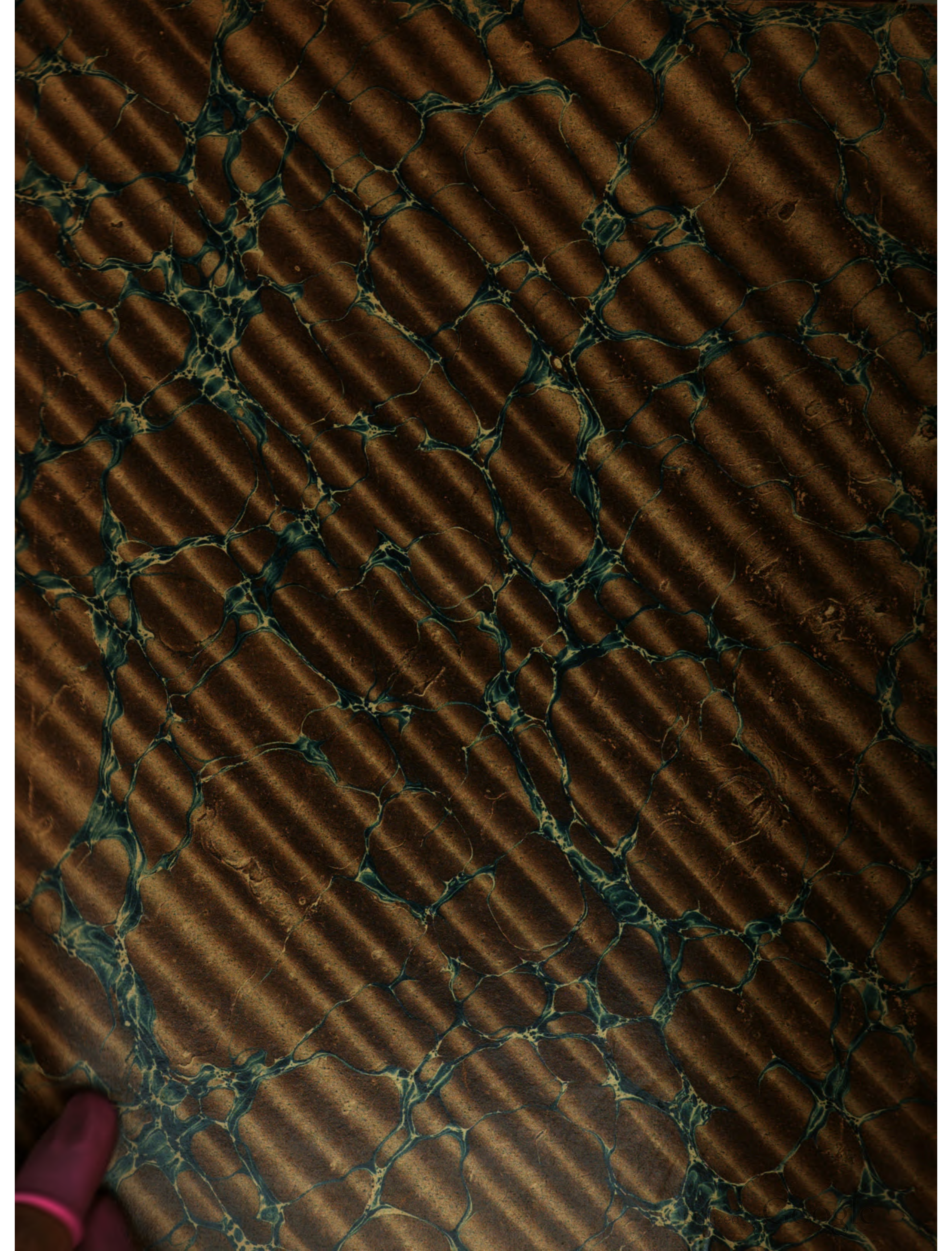
Planche 1, figure 4, *au lieu de* Y^h, *lisez* V^h.

Planche 1, figures 6, 7 et 8, mettez la lettre *f* près de la flèche.

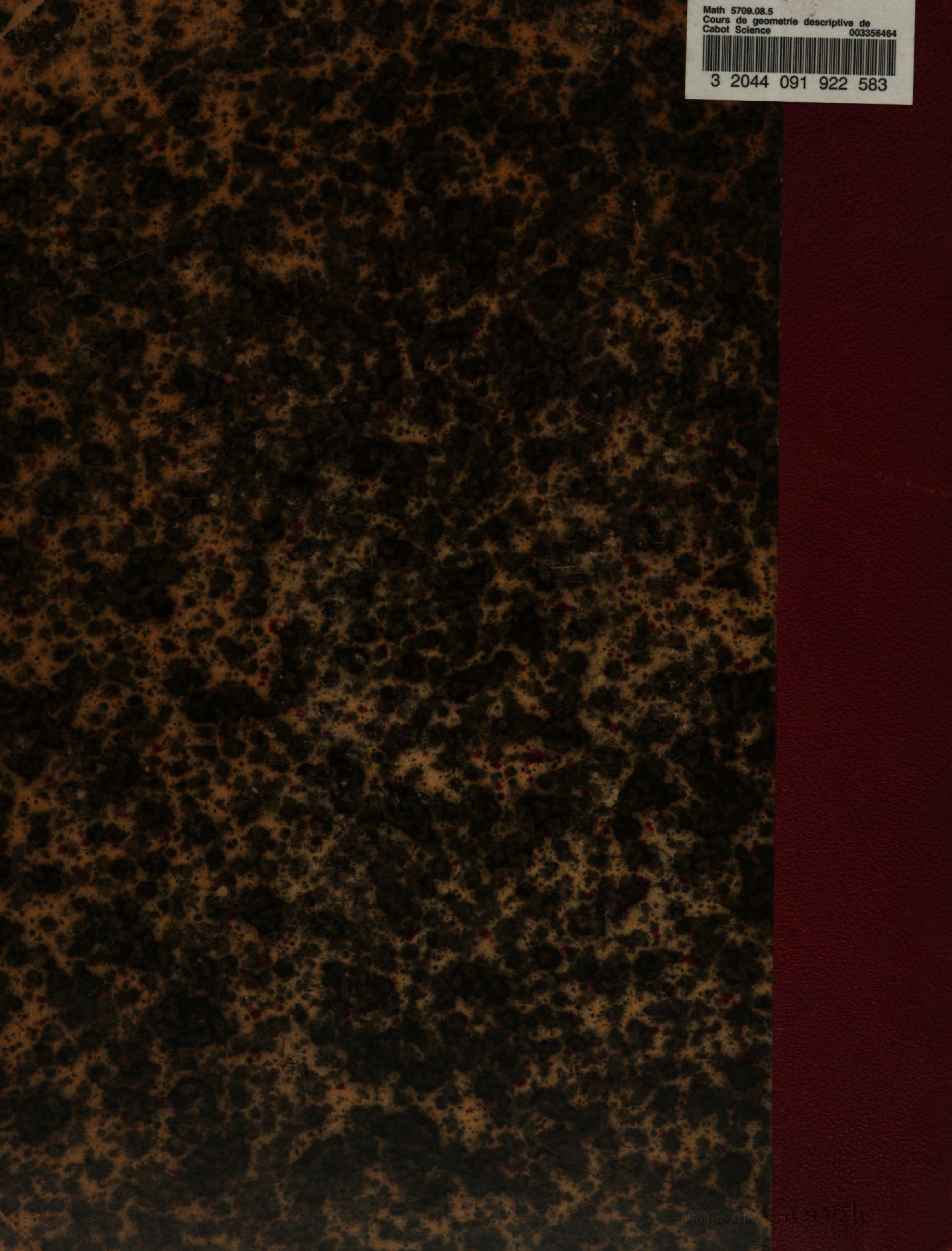
Planche 5, figure 66, mettez la lettre α sur HI, et la lettre β sur FG.

Planche 13, figure 136, prolongez la ligne P^vP^h jusque M^h.

Planche 17, figure 152, *au lieu de* O, *lisez* O^r.






Math 5709.08.5
Cours de geometrie descriptive de
Cabot Science 003356464
3 2044 091 922 583
Digitized by Google